548
В.35

Вернадский В.И.
Основы кристаллографии

~~75707~~

НИБЦ РЭУ им.Г.В. Плеханова

001319355

И. Н. Х. им. П

Запишите фамилию
блиотечного билета.
сдать контролелу.
Фамилия, инициалы

№

978

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

МОСКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

ОТДѢЛЪ ЕСТЕСТВЕННО-ИСТОРИЧЕСКІЙ.

ВЫПУСКЪ ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ.

Библиотека Института Народного Хозяйства им. Плеханова
Уч. № 15707
Пр. 36 г.
Пр. 39 г.
БИБЛИОТЕКА Института Народного Хозяйства им. Плеханова
№ 316663
1955 г.

МОСКВА.
Университетская типографія, на Страстномъ бульварѣ.
1904.

020412
ПРОВЕРЕНО

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Московскаго Университета.

Редакторъ естественно-историческаго отдѣла орд. проф. *М. Мензбиръ.*

Ш-С{66}

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

Проф. В. И. Вернадскій. — Основы кристаллографіи. Ч. I. Введеніе. Ученіе о симметріи. Явленія, выражаемыя закономъ многогранниковъ (выпускъ первый) ..... I—VIII, 1—344.

548
В 35

ОСНОВЫ КРИСТАЛЛОГРАФІИ.

В. И. Вернадскаго

ПРОФЕССОРА МОСКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Введеніе. Ученіе о симметріи. Явленія, выражаемыя закономъ многогранниковъ.

ВЫПУСКЪ ПЕРВЫЙ.

Библиотека Института Народнаго Хозяйства им. Плеханова № 31663 1935

Библиотека Института Народнаго Хозяйства им. Плеханова
Инв. № 25781
Отд. М. С.
№ 107
М. О. Р. К. О.

ОТЪ АВТОРА.

Работа, первый выпускъ которой лежитъ предъ читателемъ, явилась результатомъ многолѣтняго преподаванія кристаллографіи въ Московскомъ Университетѣ, а также научной работы и размышленія въ этой области въ теченіе болѣе 15 лѣтъ. Нѣкоторыя части ея сложились непосредственно подъ вліяніемъ научнаго преподаванія, но вся книга совсѣмъ не имѣетъ формы университетскихъ лекцій, а тѣмъ болѣе учебника, приноровленнаго къ какимъ бы то ни было программнымъ или экзаменаціоннымъ требованіямъ. Очень значительныя ея части — цѣлые отдѣлы — совершенно выходятъ за предѣлы университетскаго преподаванія.

Моей задачей было дать въ ней изложеніе современнаго состоянія кристаллографіи, подвергнуть критикѣ и провѣркѣ многіе изъ господствующихъ въ наукѣ взглядовъ и кромѣ того провѣрить на всемъ доступномъ мнѣ научномъ матеріалѣ нѣкоторыя идеи и принципы, которые не являются распространенными,—или даже должны считаться совсѣмъ непринятыми, — но которые казались мнѣ вытекающими изъ нынѣ извѣстнаго матеріала и способными освѣтить нынѣ темныя области.

Таковы идеи о векторіальной структурѣ вещества, не разъ высказывавшіяся тѣми или другими учеными, но наиболѣе полное и глубокое изложеніе которыхъ было мной встрѣчено въ совершенно и незаслуженно забытыхъ работахъ Ю. Грассманна. Я съ ними познакомился самъ совершенно случайно уже послѣ того, какъ значительная часть книги была написана и мною были независимо выработаны положенія, кои я потомъ частію нашелъ изложенными въ трудѣ Грассманна. Этимъ объясняется отсутствіе упоминанія о Грассманнѣ въ историческомъ очеркѣ. Впрочемъ, принимая основныя посылки Грассманна — въ настоящее время, благодаря

сильному прогрессу научнаго знанія — можно сдѣлать изъ этихъ принциповъ выводы, которыхъ Грассманнъ не касался и не подозрѣвалъ. Таковы напр. выводы объ энантіоморфныхъ и гемиморфныхъ структурахъ въ связи съ закономъ Гаюи и т. д. Я думаю, что провѣрка векторіальной гипотезы, сдѣланная въ этомъ трудѣ, укажетъ, что эта гипотеза позволяетъ удобно и плодотворно разбираться въ огромномъ фактическомъ матеріалѣ, добываемомъ научною работою. Мнѣ кажется, тѣ же идеи должны играть значительную роль въ теоріи матеріи вообще, и примѣненіе ихъ напр. къ ученію объ инерціи заслуживаетъ серьезнаго вниманія. Но такая разработка векторіальной гипотезы матеріи съ общей точки зрѣнія стояла въ сторонѣ отъ плана этого сочиненія.

Другимъ принципомъ, легшимъ въ основу книги, была идея о капиллярныхъ явленіяхъ твердаго вещества. Благодаря своеобразной, исторически объяснимой, фантасмагоріи, наше представленіе о кристаллѣ и законахъ кристаллографіи стояло почти внѣ всякой связи съ тѣми областями знанія, неразрывную часть которыхъ составляетъ кристаллографія—именно съ физикой. Капиллярныя явленія, неизмѣнно и всюду проявляющіяся въ жидкостяхъ, казалось, совершенно отсутствовали въ твердомъ тѣлѣ. Хотя разнообразныя явленія физики—напр. термоэлектрическіе токи, явленія прилипанія и т. п.—указывали постоянно на особыя свойства поверхностей твердаго вещества, въ физической литературѣ еще въ 1880—1890-хъ годахъ происходили споры и проповѣдывались сомнѣнія въ существованіи поверхностныхъ силъ (поверхностнаго натяженія) въ твердомъ веществѣ. А между тѣмъ огромная и разнообразная область этихъ явленій въ твердой матеріи давнымъ давно изучалась и изслѣдовалась, давно была извѣстна, но подъ именемъ явленій кристаллизаціи стояла внѣ всякой связи съ явленіями волосности. Въ обычныхъ схематическихъ представленіяхъ эти явленія считались выраженіемъ внутреннихъ частичныхъ силъ, т. нз. сцѣпленія твердаго тѣла. Въ теченіе многихъ лѣтъ такія воззрѣнія не давали возможности приложить къ объясненію природныхъ явленій какую бы то ни было новую путеводную нить; они были въ то же время совершенно безплодны въ теченіе долгихъ десятилѣтій своего господства. Впервые къ серединѣ XIX столѣтія у нѣкоторыхъ физиковъ, какъ напр. у Фарадэя и Дж. Томпсона и философовъ, напр. у Курно—зарождается ясное пони-

маніе того, что своеобразныя явленія, наблюдаемыя на контактѣ разнородныхъ срединъ,—поверхностныя силы,—имѣютъ мѣсто и въ кристаллахъ и что они даютъ объясненіе многимъ, непонятнымъ иначе наблюденіямъ. Эти идеи получили ясное выраженіе въ 1870—1880-хъ годахъ—у Джиббса и Кюри—но, насколько знаю, не были до сихъ поръ положены въ основу изученія всего матеріала кристаллографіи. Попытка такой переработки кристаллографіи дѣлается въ этомъ сочиненіи; кристаллическій многогранникъ получаетъ въ немъ значеніе капли твердаго тѣла, а явленія кристаллизаціи становятся простымъ аналогомъ капиллярныхъ явленій жидкостей. Обработка матеріала съ этой точки зрѣнія позволяетъ объяснить цѣлый рядъ разнообразныхъ явленій, которыя иначе считались случайностями, или совсѣмъ не объяснялись, какъ наприм. комбинаціи, штриховка, параллельные сростки, скелеты и т. д. Наконецъ, логическое развитіе этихъ идей заставляетъ въ корнѣ мѣнять представленіе о многихъ явленіяхъ, напр. о спайности—получающей простое объясненіе, какъ проявленіе главнымъ образомъ поверхностнаго натяженія кристалла, а не дѣйствія однихъ внутреннихъ частичныхъ силъ. Мнѣ думается, что возможность такихъ разнообразныхъ приложеній становится видной только при обработкѣ всего матеріала науки—и въ значительной степени оправдываетъ появленіе этого сочиненія, несмотря на существованіе многихъ другихъ—почтенныхъ и прекрасныхъ—курсовъ кристаллографіи.

Я хочу оттѣнить еще одну идею, которая тѣсно связана съ представленіемъ о кристаллизаціи, какъ о проявленіи капиллярныхъ свойствъ твердаго тѣла. Это послѣднее воззрѣніе получило научное значеніе только благодаря тѣсной связи своей съ ученіемъ объ энергіи. Приложеніе къ кристаллографіи нѣкоторыхъ изъ основныхъ принциповъ энергетики представляетъ одно изъ послѣднихъ пріобрѣтеній конца XIX столѣтія. Но такое приложеніе не было сдѣлано по отношенію ко всему матеріалу данной области знанія; оно касалось лишь нѣкоторыхъ отдѣльныхъ научныхъ вопросовъ. А между тѣмъ, изученіе вопроса во всемъ его объемѣ не только открываетъ поле новымъ приложеніямъ энергетики, но вызываетъ необходимость расширить то представленіе объ энергіи въ кристаллѣ, которое имѣло свое выраженіе въ научной литературѣ. Изученіе фактовъ указываетъ на существованіе въ кристаллахъ совершенно новой формы энер-

гіи, тѣсно связанной съ векторіальной структурой вещества. Мнѣ пришлось, поэтому, ввести новое представленіе объ *анизотропной* (или *векторіальной*) *энергіи*, ибо только этимъ путемъ оказалось возможнымъ примѣнить принципы энергетики къ двойниковымъ явленіямъ и понять разнообразныя выраженія наружной формы кристалловъ. Съ этой точки зрѣнія двойниковыя сростанія явились формой кристаллизаціи при преобладаніи въ веществѣ анизотропной энергіи надъ поверхностной и двойники получили свое естественное мѣсто среди другихъ случаевъ кристаллизаціи. До сихъ поръ двойниковыя строенія стояли внѣ всякой связи съ другими явленіями кристаллизаціи. Эта анизотропная форма энергіи можетъ наблюдаться въ однородныхъ срединахъ только въ твердомъ тѣлѣ и служитъ наиболѣе своеобразнымъ выраженіемъ его векторіальной структуры. Она является главной особенностію капиллярныхъ свойствъ твердаго тѣла, ибо обусловливаетъ новыя и своеобразныя явленія, возникающія на границѣ различныхъ векторовъ одного и того же однороднаго твердаго тѣла. Она является исключительной особенностію твердыхъ однородныхъ фазъ матеріи.

Во всемъ трудѣ сознательно проводятся указанія на историческій ходъ развитія науки. Изложеніе научныхъ данныхъ связывается съ ихъ исторіей; по возможности оно дѣлается на основаніи самостоятельнаго изученія старинной и новой литературы. При этомъ мнѣ пришлось выдвинуть и вспомнить многихъ ученыхъ, имена и работы которыхъ покрылись пылью забвенія. Какъ увидитъ читатель, съ этой точки зрѣнія онъ встрѣтится здѣсь не разъ съ утвержденіями, не согласными съ указаніями наиболѣе распространенныхъ руководствъ и научныхъ трудовъ.

Я думаю, что такое сознаніе исторической эволюціи знанія имѣетъ не одинъ библіографическій или историческій интересъ. Оно совершенно необходимо для правильной оцѣнки какого-нибудь утвержденія, de facto неизбѣжно всегда присутствуетъ при всякой научной работѣ.

Нерѣдко приходится слышать, что научное изложеніе можетъ дѣлаться чисто логически, безъ всякой связи съ историческимъ развитіемъ знанія. Нетрудно убѣдиться, что такое утвержденіе основано на недоразумѣніи. Историческое начало всегда проникаетъ всякое научное изложеніе. Можно только толковать лишь о томъ,

давать ли ему мѣсто въ научномъ изложеніи явно и сознательно или оставлять проявляться помимо воли автора. Дѣло въ томъ, что, даже при чисто догматическомъ изложеніи предмета, всякій изслѣдователь ограниченъ въ своихъ посылкахъ предѣлами того, что добыто работой прежнихъ поколѣній и что, конечно, не представляетъ полнаго выраженія дѣйствительности. Пройдетъ немного лѣтъ, изложеніе «устарѣетъ», пріобрѣтутъ значеніе новые факты или выводы, которые сдѣланы изъ оставленныхъ изслѣдователемъ безъ вниманія явленій. Тогда ясно проявится историческая временная подкладка его работы и отпадутъ его выводы, казалось, неизбѣжно вытекавшіе изъ дѣйствительности. Даже въ такихъ наукахъ—абстрактнаго характера—какъ геометрія—ясно чувствуется этотъ неизбѣжный историческій субстратъ нашей мысли.

Явное проявленіе историческаго сознанія особенно необходимо при изложеніи современнаго состоянія какой-нибудь науки, такъ какъ только этимъ путемъ возможно сохранить для будущаго изслѣдователя указанія на взгляды и факты, которые кажутся автору ложными или неважными—но которые ходъ временъ какъ разъ выдвинетъ впередъ, какъ правильные или научно-полезные...

Все сочиненіе предполагается въ двухъ частяхъ. Во вторую, отнесено изложеніе явленій, выражаемыхъ закономъ эллипсоида (т. е. идущихъ въ идеально однородной средѣ) и болѣе сложныхъ фигуръ. Я не знаю, когда удастся довести ее до полной обработки. Я выпускаю пока первую часть, которая представляетъ самостоятельное цѣлое и охватываетъ м. пр. цѣликомъ то, что называли прежде геометрической кристаллографіей.

Интересы автора обращены въ сторону физики, а не геометріи. Поэтому имъ оставлены безъ разсмотрѣнія всѣ явленія и обобщенія, не имѣющія мѣста въ физическихъ наблюденіяхъ. Благодаря проявленію въ кристаллическомъ веществѣ геометрическихъ законовъ, въ кристаллографіи пріобрѣли особое значеніе чисто геометрическіе вопросы и нѣкоторые ея отдѣлы обработаны очень полно въ этомъ направленіи. Въ результатѣ такой обработки нѣкоторыя изложенія кристаллографіи пріобрѣли характеръ чисто геометрическихъ дисциплинъ. Разсмотреніе этихъ отдѣловъ науки стоитъ въ сторонѣ отъ задачъ данной работы.

Этимъ опредѣляется и объемъ тѣхъ математическихъ понятій,

какія необходимы для вывода наблюдаемыхъ закономостей. Благодаря характеру законовъ симметріи, положенныхъ въ основу сочиненія — можно было элементарно разсматривать явленія, аналитическое изученіе которыхъ очень сложно. Авторъ всюду придерживался по возможности наиболѣе простаго математическаго выраженія явленій. Все таки, кое гдѣ, пришлось выйти за предѣлы обычнаго математическаго образованія натуралиста, образованія очень незначительнаго, благодаря малому объему математической программы средней школы. Однако, современное состояніе естествознанія не позволяетъ уже ограничиваться предѣлами т. нз. элементарной математики и основы «высшей математики» должны признаваться извѣстными всякому натуралисту.

Въ концѣ книги (2-го выпуска) даны литературныя и библіографическія примѣчанія, дополненія и исправленія къ отдѣльнымъ §§.

Второй выпускъ—заключающій явленія полиморфизма, кристаллизаціи (въ томъ числѣ и двойниковъ), спайности, вытравленія, скольженія печатается; имъ закончится перваго часть всего сочиненія.

Въ заключеніе считаю своимъ пріятнымъ долгомъ высказать свою глубокую благодарность дорогимъ моимъ ученикамъ П. К. Алексату, Л. Л. Иванову, С. П. Попову и Я. В. Самойлову за помощь, оказанную ими мнѣ при корректурѣ книги, а также Физико-Математическому Факультету Московскаго Университета за доставленіе возможности печатать мой трудъ въ «Запискахъ Университета» и редактору Записокъ проф. М. А. Мензбиру, сдѣлавшему все возможное, чтобы обезпечить мнѣ удобное печатаніе.

Москва. Университетъ, Минералогическій Кабинетъ.
Апрѣль 1903.

ГЛАВА I.

Очеркъ развитія кристаллографіи.

„Crystallisatio geometrizantis naturae opus quoddam est, et sane mirabilissimum; dignum ideo ut totis ingenii viribus totaque mentis contentione exquiratur, non quod spectet tantam amoenitatem et voluptatem, quae mirabilium scientiam consequitur, verum etiam ob maximam in re physica utilitatem".—Guglielmini. 1705.

1. Кристаллографія занимается изученіемъ законовъ твердаго состоянія матеріи. На ряду съ ученіемъ о газахъ и жидкостяхъ она составляетъ одинъ изъ отдѣловъ физики частичныхъ силъ. Однако исторически кристаллографія развивалась совершенно независимо отъ физики: связь ея съ другими физическими науками до сихъ поръ не вошла въ общее научное сознаніе (§ 41 сл.).

Причиной этого являются главнымъ образомъ самые объекты ея изслѣдованій; ими вызывается своеобразіе методовъ кристаллографіи, векторіальный характеръ наблюдаемыхъ въ ней законностей.

Долгое время предметомъ изученія кристаллографіи служили геометрически правильныя тѣла—многогранники—которыя при разныхъ условіяхъ наблюдались въ природѣ или получались искусственно. Изученіе ихъ наружной формы и раскрытіе ея законовъ началось раньше, чѣмъ были выяснены физическія явленія, выразителемъ которыхъ служатъ эти многогранники.

Они стали предметомъ изученія, классификаціи, подобно тому какъ изучались животныя, растенія, минералы, ископаемыя—безъ всякаго предварительнаго рѣшенія вопроса объ ихъ происхожденіи. Они изучались, какъ отдѣльныя произведенія Природы, какъ частныя проявленія наблюдаемыхъ въ Ней правильностей. Лишь благодаря воз-

можности вопроизводить кристаллическіе многогранники опытомъ, получать ихъ искусственно, много времени спустя, была понята ихъ природа. Соотвѣтственно съ измѣненіемъ взгляда на кристаллическіе многогранники—измѣнялись воззрѣнія на задачи и предметъ кристаллографіи, на положеніе ея въ системѣ наукъ.

2. Кристаллическіе многогранники, геометрически правильныя формы, какія принимаютъ нѣкоторыя вещества, при опредѣленныхъ условіяхъ, извѣстны всякому. Мы видимъ ихъ въ формѣ снѣжинокъ, миріадами падающихъ въ хлопьяхъ снѣга, въ формѣ красивыхъ узоровъ инея и льда на окнахъ, въ соли и сахарѣ и въ другихъ предметахъ домашняго обихода. Нерѣдко они принимаютъ форму совершенно правильныхъ геометрическихъ поліэдровъ, иногда—какъ въ снѣгѣ—даютъ ясное выраженіе геометрическихъ законовъ въ правильности узора. Они попадались человѣку всюду во время самыхъ раннихъ, первыхъ попытокъ руднаго дѣла, они нерѣдко привлекали его своей красотой и получили широкое примѣненіе въ видѣ драгоцѣнныхъ камней. Отъ одного изъ такихъ природныхъ соединеній, прозрачнаго безцвѣтнаго горнаго хрусталя [1]), свободной окиси кремнія, произошло и названіе «кристаллами» всѣхъ такихъ геометрическихъ тѣлъ, получающихся путемъ внутреннихъ силъ вещества. Κρύσταλλος, т.-е. льдомъ древніе Греки назвали горный хрусталь по его сходству со льдомъ благодаря его прозрачности; позже тоже названіе было перенесено на стекло, благодаря тому же самому его признаку. Такой переносъ не былъ случайностію. Въ это время люди, вдумывавшіеся въ естественныя тѣла предполагали, что горный хрусталь и другія аналогичныя вещества представляютъ разныя стадіи одного и того же процесса, первую неустойчивую форму котораго мы видимъ въ льдѣ, образующемся путемъ затвердѣванія жидкой воды. Путемъ неизвѣстнаго таинственнаго процесса каждое вещество можетъ сдѣлаться твердымъ, безцвѣтнымъ, прозрачнымъ. Отсюда зародилось представленіе объ особыхъ силахъ *кристаллизаціи*, приводящихъ вещество въ состояніе, аналогичное горному хрусталю, льду, стеклу. По мнѣнію однихъ оно достигалось дѣйствіемъ интенсивнаго холода, по мнѣнію другихъ высокаго жара. Измѣняясь

---

[1]) „Хрусталь"—испорченное, укоренившееся въ русскомъ языкѣ слово кристаллъ.

въ своемъ содержаніи, это представленіе о кристаллизаціи, выведенное въ туманной эпохѣ зарожденія науки, сохранилось до нашего времени и является первымъ обобщеніемъ въ этомъ отдѣлѣ знанія.

3. Кристаллы давно обратили на себя вниманіе изслѣдователей природы. Указаніе на нихъ мы находимъ въ произведеніяхъ древнихъ греческихъ и римскихъ писателей, разсуждавшихъ о камняхъ, о строеніи земной коры. Въ *ляпидаріяхъ*, въ которыхъ въ теченіе многихъ вѣковъ передавались знанія о неодушевленныхъ природныхъ тѣлахъ — мы часто встрѣчаемъ указанія на кристаллы. Въ этихъ ляпидаріяхъ сохранилась сумма скопившихся вѣковымъ опытомъ наблюденій надъ камнями, минералами и горными породами, вырабатывались мистическія и натурфилософскія воззрѣнія, давались медицинскіе и техническіе рецепты. Отъ временъ древней греческой науки они въ Западной Европѣ развивались до XVI—XVII столѣтія, держались у насъ и на Востокѣ Европы до XVIII вѣка и отголоски ихъ исчезаютъ на нашихъ глазахъ въ XIX вѣкѣ въ нѣкоторыхъ Японскихъ, Китайскихъ и Арабскихъ сочиненіяхъ.

Однако разнообразная форма природныхъ геометрическихъ тѣлъ не обращала на себя во всѣхъ этихъ произведеніяхъ достаточно глубокаго вниманія. На нее смотрѣли какъ на болѣе или менѣе случайное свойство вещества и лишь изрѣдка связывали съ ней мистическія представленія.

4. Начало кристаллографіи. XVII вѣкъ. Лишь мало по малу, со времени пробужденія интереса къ изученію природы, начинается болѣе внимательное отношеніе къ кристалламъ. Еще въ сочиненіяхъ, приписываемыхъ арабскому химику VIII вѣка Геберу, но которыя представляютъ произведенія неизвѣстнаго ученаго конца XIII или начала XIV столѣтій, мы находимъ ясныя и опредѣленныя указанія на постоянство геометрической формы кристалловъ при полученіи химическихъ соединеній. Псевдо—Геберъ настаиваетъ на различіи во внѣшнемъ геометрическомъ видѣ разныхъ химическихъ тѣлъ и на постоянствѣ явленій кристаллизаціи, т.-е. на полученіи соединеній въ одинаковыхъ многогранникахъ, въ тѣхъ случаяхъ когда химическое вещество является въ чистомъ видѣ, при чемъ эти поліэдры для разныхъ тѣлъ различны. Мало по малу, въ связи съ развитіемъ опытной химіи въ трудахъ алхимиковъ и врачей, благодаря накопленію наблюденій въ области руд-

наго дѣла (Бирингуччіо, Агрикола), въ зависимости отъ распространенія нѣкоторыхъ системъ древней философіи—главнымъ образомъ неоплатонизма и эпикурейства, въ общее сознаніе все болѣе и болѣе входитъ представленіе о формахъ кристалловъ, какъ указателяхъ неизвѣстныхъ, но важныхъ законовъ природы. Въ то же время матеріалъ, подлежащій изученію, увеличивается: въ музеяхъ и собраніяхъ частныхъ лицъ и научныхъ кружковъ начинаютъ скопляться разнообразные кристаллы вмѣстѣ съ окаменѣлостями, раковинами и т. п. Процессъ совершался въ тиши, мало оставилъ ясныхъ и уловимыхъ слѣдовъ, но въ изданныхъ каталогахъ немногихъ отдѣльныхъ музеевъ, въ перепискѣ ученыхъ или въ ихъ трудахъ разсѣяны многочисленныя указанія на отдѣльныя, когда то существовавшія, собранія, на интересъ, какой возбуждали геометрическія тѣла, возникшія въ природѣ безъ участія человѣка, но похожія на созданія его геометріи. Въ нѣкоторые Европейскіе музеи перешли и въ нихъ сохранились образцы этихъ первыхъ собирателей до начала XVII столѣтія. Къ началу XVII вѣка подъ этими разносторонними вліяніями сложились первыя обобщенія въ кристаллографіи и они получили ясную форму главнымъ образомъ въ работахъ Кеплера, Дависсона и Гассенди.

5. Эти три лица работали независимо другъ отъ друга и находились подъ сильнымъ и глубокимъ вліяніемъ натурфилософскихъ теченій и возродившейся древней философіи. Первый по времени—I. Кеплеръ (1571—1630), знаменитый астрономъ, явился и въ философіи провозвѣстникомъ новаго духа, это человѣкъ новаго времени; болѣе молодые Дависсонъ и Гассенди (1592—1655), гораздо тѣснѣе связаны съ духомъ среднихъ вѣковъ, главнымъ образомъ съ зародившимися въ нихъ мистическими и атомистическими воззрѣніями. Первой научной работой въ кристаллографіи явился небольшой трудъ Кеплера «О снѣгѣ» (1615). Въ немъ впервые точно и ясно выраженъ законъ сохраненія постоянства гранныхъ угловъ, правда для одного только вещества—снѣга. Эта работа явилась слѣдствіемъ увлеченія Кеплера гармоніей міра, его исканій разнообразныхъ численныхъ и геометрическихъ соотношеній въ природныхъ явленіяхъ. Значеніе работы Кеплера заключается въ томъ, что онъ впервые доказалъ, что кристаллы подчиняются законамъ геометріи. Одинъ изъ его старшихъ современниковъ Энцелій пре-

красно выразилъ это чувство: «Natura geometriam exercuit sub terrae visceribus, mirabili opificio».—

6. Совершенную противоположность Кеплеру представлялъ другой старинный кристаллографъ, Шотландскій врачъ и эмигрантъ Вильямъ Дависсонъ. Это былъ послѣдователь Парацельса, главнымъ образомъ позднѣйшихъ мистическихъ его адептовъ (Северина), жившій въ то время, когда само ученіе Парацельса уже потеряло почти всякое научное значеніе. Онъ соединялъ съ туманнымъ и неяснымъ міровоззрѣніемъ натурфилософа, тонкій и ясный умъ экспериментатора. Дависсонъ былъ первымъ профессоромъ химіи въ Парижѣ въ Jardin du Roi, и здѣсь въ 1630 г. издалъ онъ свою «Philosophie pyrotechnique», въ которой далъ впервые попытку научной кристаллографіи. Дависсону принадлежитъ идея о простой формѣ и о комбинаціи; зависимость наружной формы выдѣляющихся многогранниковъ отъ химическаго состава и постоянство опредѣленной формы кристалловъ для одного и того же химическаго соединенія была выражена имъ ясно и опредѣленно. У Дависсона мы находимъ вновь указанія на законъ постоянства гранныхъ угловъ, выраженный для снѣга Кеплеромъ.

7. Почти одновременно съ нимъ философъ Гассенди впервые перешелъ отъ наружной формы кристалла къ представленію объ ихъ внутреннемъ строеніи. Гассенди—историческая заслуга котораго въ возрожденіи атомистической гипотезы громадна и философское значеніе котораго до сихъ поръ не достаточно оцѣнено—перерабатывалъ съ точки зрѣнія атомизма всѣ представленіи о строеніи матеріи. Прійдя вновь къ заключенію о постоянствѣ получающихся для каждаго химическаго соединенія кристаллическихъ многогранниковъ и о различіи ихъ для тѣлъ разнаго состава—онъ заключилъ, что эти поліэдры суть выразители формы атомовъ даннаго тѣла. Когда онъ замѣтилъ, что большіе и маленькіе многогранники одного и того же вещества одинаковы, что маленькіе вырастаютъ въ большіе, не мѣняя формы—онъ предположилъ, что въ кристаллахъ вполнѣ отражается форма атомовъ твердаго вещества и что они растутъ послойнымъ наложеніемъ этихъ атомовъ. Формой получающихся многогранниковъ онъ не вполнѣ удачно пытался даже объяснить нѣкоторыя свойства тѣлъ.

8. Такимъ образомъ къ серединѣ XVII ст., въ невполнѣ точной, но ясной формѣ были поставлены главные вопросы, которые въ XIX в. были вновь развиты въ болѣе общемъ видѣ и послужили основой всѣхъ нашихъ научныхъ воззрѣній въ этой области. Мысли Кеплера, Дависсона, Гассенди не прошли безслѣдно; ихъ вліяніе видно въ воззрѣніяхъ многихъ ученыхъ этого времени; подъ прямымъ или косвеннымъ ихъ воздѣйствіемъ нѣкоторыя изъ этихъ мнѣній вошли въ общій научный обиходъ. Наконецъ, во второй половинѣ и къ концу XVII столѣтія, они получили ясное и строгое выраженіе и доказательство въ трудахъ Николая Стенсена (Стенона), Э. Бартолина и Х. Гюйгенса. Основные принципы кристаллографіи были окончательно выведены работами этихъ лицъ. Однако ихъ труды были поняты лишь въ XIX вѣкѣ; они были совершенно забыты въ теченіе двухъ столѣтій, чего никакъ нельзя было ожидать изъ ясности, точности и глубины ихъ содержанія.

9. Николай Стенсенъ (1631—1686) и Э. Бартолинъ были почти современниками и тѣсно связаны съ научнымъ кружкомъ, группировавшимся вокругъ Лейденскаго Университета. Они оба — повидимому независимо—вывели и доказали основные законы наружной формы кристалла, хотя шли совершенно разнымъ путемъ. Младшій изъ нихъ Стенсенъ, также какъ и Бартолинъ, датчанинъ родомъ— издалъ свои работы въ 1669 г. во Флоренціи въ знаменитомъ незаконченномъ сочиненіи «De solido inter solidum naturaliter contento». Это программа большого намѣченнаго труда о твердомъ веществѣ, наблюдаемомъ на землѣ. Въ этой программѣ ясно, просто и чрезвычайно сжато и точно изложены основные принципы современной геологіи, минералогіи и кристаллографіи. А между тѣмъ трудъ Стенона, который читался и пользовался авторитетомъ въ теченіе всего XVIII столѣтія, совершенно не былъ настоящимъ образомъ понятъ и только въ началѣ XIX вѣка его значеніе и правильное толкованіе стало намъ яснымъ. На него съ большимъ уваженіемъ указываетъ Бюффонъ, исходившій въ геологіи изъ совершенно иныхъ воззрѣній, его знаютъ и переводятъ ученые, группирующіеся вокругъ Англійскаго Королевскаго Общества временъ Ньютона и цѣнятъ въ этихъ немногихъ ясныхъ страницахъ одни частности, а не то, что̀ выдвигается въ нихъ нами.

Эта работа Стенсена была его лебединой пѣснею въ области естествознанія. Блестящій анатомъ, сдѣлавшійся знаменитымъ, почти юношей, одинъ изъ первыхъ изслѣдователей мозга, обладавшій чрезвычайно широкимъ научнымъ образованіемъ, Стенонъ работалъ съ исключительной энергіей въ области геологическихъ и органическихъ наукъ о природѣ. Среди его работъ въ душѣ его зародились глубокія сомнѣнія; передъ нимъ съ необыкновенной ясностью стала тщета точнаго знанія; съ нимъ произошелъ переломъ, очень напоминающій душевную драму Паскаля. Онъ сознательно бросилъ занятія наукой, перешелъ въ католичество, сталъ монахомъ и окончилъ жизнь въ исключительно суровой и нищенской обстановкѣ католическаго миссіонера среди чуждаго и враждебнаго ему протестанскаго населенія Германіи. Передъ этимъ переломомъ онъ издалъ программу своего сочиненія, поручивъ своему ученику Г. Якобэусу докончить и издать собранный имъ большой матеріалъ для полной работы. Этотъ трудъ никогда не увидѣлъ свѣта.

Въ этой работѣ Стенонъ впервые точно и опредѣленно высказалъ *законъ постоянства гранныхъ угловъ* для всѣхъ веществъ и указалъ характеръ роста кристалловъ—послойнымъ наложеніямъ частицъ. Наклонъ кристаллическихъ плоскостей не мѣняется, по объясненію Стенона, при ростѣ кристалла, хотя очертанія и размѣры ихъ могутъ претерпѣвать всякія измѣненія. Законы геометріи всецѣло приложимы къ кристалллическимъ многогранникамъ, если обращать вниманіе только на взаимный наклонъ плоскостей, оставляя въ сторонѣ очертанія и размѣры граней. Кристаллическіе поліэдры съ одинаковыми гранными углами, но съ разной формой плоскостей—идентичны. Такіе многогранники всецѣло сравнимы съ идеальными тѣлами геометріи и всѣ законы геометріи всецѣло къ нимъ примѣнимы.

Обобщеніе Стенона является важнѣйшимъ шагомъ въ развитіи нашей науки. Въ концѣ XVII и въ началѣ XVIII столѣтій оно не прошло безслѣдно. Стенонъ доказалъ его для горнаго хрусталя и гематита. Почти одновременно съ нимъ и повидимому отъ него независимо Э. Бартолинъ вывелъ его для исландскаго шпата, нѣсколько позже (1695) Левенгукъ для гипса, а въ самомъ концѣ XVII столѣтія неоцѣненный по заслугамъ англійскій ученый Р. Бойль и еще болѣе ясно Болоньскій врачъ и математикъ Доминикъ Гульель-

мини (1655—1710) доказалъ общность закона Стенона для всѣхъ кристалловъ, его приложимость къ искусственнымъ выпаденіямъ солей. У Гульельмини мы видимъ ясное представленіе о простой формѣ и комбинаціи, начатки классификаціи простыхъ формъ.

10. Въ концѣ того же столѣтія, въ 1670 г., въ Копенгагенъ были привезены изъ Исландія огромные куски прозрачнаго минерала, названнаго исландскимъ шпатомъ. Они попали въ руки профессору Копенгагенскаго Университета Э. Бартолину (1625—1698). Этотъ очень извѣстный тогда ученый, одинъ изъ самыхъ блестящихъ представителей Бартолиновъ,—семьи сыгравшей видную роль въ исторіи науки XVII столѣтія,—близкій человѣкъ Стенону, подвергъ вещество точному изслѣдованію, сдѣлалъ въ немъ открытія, которыя были совершенно неожиданны и не понятны съ точки зрѣнія тогдашнихъ воззрѣній. Бартолинъ открылъ: 1) такъ называемое свойство *спайности*, т. е. способность вещества при ударѣ распадаться на многогранники одинаковой формы. Эти поліэдры спайности, по нашимъ воззрѣніямъ аналогичны каплямъ жидкаго тѣла и являются характернымъ выраженіемъ структуры чистаго твердаго вещества, и 2) явленія *двупреломленія свѣта* и зависимости свѣта, проходящаго черезъ куски шпата, отъ геометрической формы его осколковъ по спайности. Это явленіе лежитъ теперь въ основѣ всей физической кристаллографіи. Бартолинъ напечаталъ свои работы нѣсколько разъ сперва въ Acta Eruditorum въ Лейпцигѣ, потомъ отдѣльно въ Копенгагенѣ, въ Philosohnical Transactions въ Лондонѣ. Онъ разослалъ одновременно образцы вещества многимъ ученымъ и академіямъ. Работа Бартолина была встрѣчена съ недовѣріемъ. Англійское Королевское Общество назначило коммиссію, въ которую входили такіе ученые, какъ Ньютонъ, Бойль, Гукъ и другіе и докладчикъ комиссіи Р. Гукъ выразилъ ея мнѣніе, что описанныя Бартолиномъ явленія случайны и указанныя имъ правильности не существуютъ. Работа Бартолина была на долго забыта, хотя, какъ извѣстно, въ общемъ вѣрна и написана для насъ вполнѣ ясно, просто и убѣдительно.

11. Черезъ 20 лѣтъ къ самому концу столѣтія въ 1691 г. [1])

---

[1]) Первыя его работы въ этомъ направленіи были сдѣланы еще въ 1670 годахъ, вскорѣ вслѣдъ за открытіемъ ихъ Бартолиномъ.

къ этому вопросу вернулся Христіанъ Гюйгенсъ (1629—1695), одинъ изъ величайшихъ научныхъ мыслителей всѣхъ временъ и народовъ. Онъ подтвердилъ правильность изслѣдованій Бартолина для кальцита, открылъ двупреломленіе въ кварцѣ; расширивъ наблюденія надъ исландскимъ шпатомъ, онъ впервые далъ точное и ясное выраженіе однородности строенія кристаллическаго вещества. Гюйгенсъ указалъ, что физическія свойства кристалла связаны съ его наружной формой и что лучи свѣта мѣняются въ зависимости отъ того, по какому направленію они идутъ въ кристаллѣ. Этимъ онъ впервые выразилъ понятіе о *векторіальности* строенія твердаго вещества, т. е. о томъ, что разныя направленія въ немъ обладаютъ неодинаковыми свойствами. При этомъ онъ замѣтилъ, что въ каждомъ осколкѣ спайности оптическія свойства зависятъ отъ направленія одинаковымъ образомъ. Поэтому, можно каждый кристаллъ счесть за однородное тѣло, во всякой точкѣ котораго оптическія (и прочія физическія) свойства подчиняются одинаковымъ законамъ. Правильность, выражаемая въ наружной формѣ кристалла, повторяется въ его внутреннемъ строеніи. Развивая далѣе мысль, впервые выраженную Гассенди и Дависсономъ, слѣды которой можно найти еще у нѣкоторыхъ его современниковъ, напр. у Гука и Бартолина— Гюйгенсъ даетъ впервые теорію строенія кристаллическаго вещества, и считаетъ, что оно состоитъ изъ мельчайшихъ молекулъ опредѣленной формы, расположенныхъ въ пространствѣ строго параллельно другъ къ другу. Гюйгенсъ впервые всталъ на ту дорогу, по которой идетъ развитіе современной теоріи строенія кристаллическаго вещества. Работы его по оптикѣ не были приняты его современниками. Вмѣстѣ съ ними были оставлены безъ вниманія доказательства связи между формой кристалла и наблюдаемыми въ немъ свѣтовыми эффектами, приведенныя Бартолиномъ и Гюйгенсомъ. Точно также была забыта и теорія строенія кристаллическаго вещества, данная Гюйгенсомъ. Всѣ эти идеи возродились лишь къ началу XIX столѣтія.

12. **Кристаллографія въ XVIII вѣкѣ до Ромэ-Делиля.** Такимъ образомъ, къ началу XVIII вѣка мы видимъ ясное выраженіе всѣхъ основныхъ законовъ кристаллографіи; но эти открытія не оказали прямого вліянія на развитіе науки и не были поняты современниками. Развитіе мысли пошло инымъ путемъ.

Сперва въ самомъ началѣ XVIII столѣтія еще замѣтно продолженіе работъ въ прежнемъ направленіи. Среди нихъ выдѣляются работы надъ выясненіемъ зарожденія кристалловъ (подъ микроскопомъ), начало которымъ было положено въ концѣ XVII столѣтія самоучкой ученымъ, бюргеромъ города Дельфтъ, А. Левенгукомъ. Эти изслѣдованія привели къ выводу, что и для мельчайшихъ кристалловъ цѣликомъ повторяются всѣ явленія, извѣстныя для многогранниковъ, видныхъ глазомъ. Ни при какихъ условіяхъ нельзя было замѣтить зарожденія кристалловъ изъ какихъ нибудь иныхъ формъ.

Исходя изъ этихъ изслѣдованій въ началѣ XVIII вѣка, идея о строеніи кристалловъ изъ мелкихъ многогранниковъ получила значительное распространеніе среди ученыхъ и интересное выраженіе ея мы видимъ въ работахъ Ля-Гира, одинокаго послѣдователя Гюйгенса.

13. Къ половинѣ того же столѣтія было сдѣлано еще одно расширеніе мысли въ области кристаллическихъ явленій. Въ концѣ XVII столѣтія изъ Цейлона въ Голландію были привезены кристаллы турмалина и въ 1707 г. Гарманнъ указалъ, что они обладаютъ свойствомъ притягивать во время охлажденія или нагрѣванія постороннія тѣла. Въ 1762 г. эти явленія были подвергнуты точному изслѣдованію петербургскимъ академикомъ Эпинусомъ, который впервые правильно опредѣлилъ и характеръ ихъ, какъ явленій пиро-электричества. Еще до него Кантонъ (1759) и В. Уильсонъ (1762) указали на тѣсную зависимость этихъ явленій отъ наружной формы кристалловъ. Послѣ работъ Эпинуса электрическія свойства турмалина многократно изучались и дали начало своеобразнымъ и стоящимъ донынѣ въ сторонѣ теоріямъ кристаллической структуры.

14. Однако такія изслѣдованія въ теченіе XVIII столѣтія были исключеніемъ. Это былъ вѣкъ дифференцированія наукъ о природѣ; въ это столѣтіе создалось раздѣленіе естественноисторическихъ дисциплинъ и выработались спеціалисты въ опредѣленныхъ областяхъ. Процессъ этотъ совершился чрезвычайно быстро; онъ проявился въ началѣ XVIII столѣтія, получилъ развитіе въ послѣдней его четверти и вполнѣ закончился уже въ началѣ XIX вѣка. Его отголоски и окончательное дробленіе наукъ происходятъ еще на нашихъ глазахъ. Въ самомъ его началѣ создалась было рѣзкая граница между чисто наблюдательными науками и опытнымъ знаніемъ. Области естественной

исторіи отдѣлились отъ физики и химіи, при чемъ развитіе послѣднихъ отдѣловъ усилилось лишь къ концу второй половины столѣтія, между тѣмъ какъ первыя десятилѣтія XVIII вѣка были временемъ необыкновеннаго расширенія нашего наблюдательнаго матеріала, какъ въ области наукъ біологическихъ, такъ и наукъ о мертвой природѣ. Это была эпоха классификацій и схемъ, которыя пріучили человѣческій умъ къ точному наблюденію въ безконечномъ разнообразіи природныхъ явленій. Между изслѣдователями въ обѣихъ отрасляхъ естествознанія быстро образовалась глубокая грань, выработался свой языкъ, получилось рѣзкое различіе методовъ, спеціализировалось знаніе литературы и фактовъ. Особенно сильно было это явленіе въ началѣ, въ XVIII столѣтіи, пока въ областяхъ физики, химіи и естественныхъ наукъ не создались удобныя схемы и не выработался простой языкъ символовъ. Но они окончательно вылились лишь въ самомъ концѣ XVIII вѣка и въ началѣ XIX.

Область кристаллографіи, по существу, принадлежащая къ наукамъ опытнымъ и являющаяся для насъ частью физики, въ это время вошла въ рядъ наукъ чисто наблюдательныхъ и изслѣдователи природы кристалловъ почти всего XVIII столѣтія не имѣли понятія о своихъ предшественникахъ XVII вѣка. Природные многогранники, кристаллическіе минералы изучались и подвергались систематизаціи, т. е. классификаціи и схематизаціи, совершенно также какъ изучались ископаемыя, окаменѣлости и т. под. Понятіе о связи внутренняго строенія и наружной формы кристалла исчезло; весь интересъ перенесся на изученіе одной наружной формы, которая считалась простымъ внѣшнимъ признакомъ солей и минераловъ. Этотъ взглядъ на долго проникъ кристаллографію и минералогію, сдѣлался обычнымъ господствующимъ теченіемъ XIX вѣка; онъ исчезаетъ на нашихъ глазахъ. Мы еще до сихъ поръ видимъ въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ и въ научномъ преподаваніи отдѣльныхъ ученыхъ своеобразныя приспособленія такихъ идей къ современному матеріалу науки.

Въ началѣ наружная форма изучалась чисто эмпирически, примѣненіе къ ней законовъ геометріи не подозрѣвалось. Вся работа, сдѣланная учеными XVII столѣтія, была вновь повторена; указанные ими законы были вновь независимо открыты. Только, благодаря привычкамъ чистыхъ натуралистовъ область изслѣдованія была расширена, стала изучаться форма не отдѣльныхъ кристалловъ,

не отдѣльныхъ случайно взятыхъ веществъ, а по возможности стали изслѣдовать всѣ природные поліэдры. Въ этомъ стремленіи захватить въ свое изученіе всѣ находящіяся въ природѣ тѣла одинаковаго типа, заключается одинъ изъ основныхъ элементовъ наблюдательнаго естествознанія и залогъ всѣхъ его открытій. Съ теченіемъ времени накопился огромный матеріалъ наблюденій надъ формой кристалловъ; онъ привелъ къ попыткамъ систематизаціи, въ трудахъ Каппелера (1723), Линнея и Кёлера (1749) и др. Изслѣдованія этого характера были сведены въ 1772 г. въ работѣ де-Ромэ де-Лиля. «Essai de cristallographie». Въ этомъ трудѣ собрана и систематизирована работа наблюдателей почти за цѣлое столѣтіе; въ немъ не заключается никакой геометрической идеи, никакихъ обобщеній; здѣсь дается лишь точное и тщательное описаніе внѣшней формы кристалловъ и временами мелькаетъ сознаніе геометрической ея правильности. Въ этомъ первомъ опытѣ Ромэ-Делиль шелъ обычнымъ путемъ натуралиста; черезъ нѣсколько лѣтъ онъ въ новой переработкѣ своего труда возстановилъ традиціи кристаллографовъ XVII вѣка и явился создателемъ современной кристаллографіи.

15. **Реформа Роме-Делиля и Гаюи.** Жанъ Баптистъ де-Ромэ-Делиль (1736—1790) былъ первымъ спеціалистомъ кристаллографомъ. Военный инженеръ по образованію, онъ много лѣтъ провелъ въ Индіи, Китаѣ и на Востокѣ; вернувшись на родину онъ поселился въ Парижѣ и принадлежалъ къ многочисленному кругу ученыхъ французскаго свѣтскаго общества стараго порядка, въ которомъ были сильно распространены интересы къ вопросамъ философіи и наукъ о природѣ. Люди этого направленія не имѣли мѣста среди университетовъ Франціи; они получали возможность научной работы, если не имѣли собственныхъ средствъ, лишь благодаря небольшимъ королевскимъ пенсіямъ, поддержкѣ частныхъ богатыхъ лицъ, являлись хранителями и устроителями частныхъ или королевскихъ научныхъ собраній. Они получали средства, устраивая публичныя лекціи и курсы, которые въ свободной и широкой степени оживляли салонную жизнь Французскаго общества до Революціи. Ромэ-Делиль впервые въ этомъ образованномъ кругу читалъ лекціи кристаллографіи, которые были первыми курсами нашей науки, когда-либо читанными. Этимъ путемъ послѣ изданія въ 1772 г. своей кристаллографіи, онъ неуклонно продолжалъ дальнѣйшія занятія, собралъ богатѣйшую кол-

лекцію кристалловъ и изучилъ въ Парижѣ 14 другихъ частныхъ собраній; послѣ 11 лѣтъ усиленной работы, онъ выпустилъ второе изданіе своего труда, которое является совершенно новымъ сочиненіемъ. Оно доказываетъ рѣзкое измѣненіе взглядовъ, направленія и идей Ромэ-Делиля и служитъ исходной точкой всего современнаго развитія кристаллографіи.

Изданное въ 1783 г. сочиненіе де-Ромэ-Делиля «Traité de Cristallographie» построено цѣликомъ на измѣреніи гранныхъ угловъ. Въ немъ вновь излагается законъ постоянства гранныхъ угловъ и впервые описанъ изобрѣтенный для Ромэ-Делиля его ученикомъ Каранжо, построенный механикомъ Венсаромъ, первый *гоніометръ*. Это былъ грубый приборъ, позволявшій дѣлать измѣренія угловъ между кристаллическими гранями съ точностію до 10—15 минутъ. Со времени введенія этого основного прибора дальнѣйшее развитіе кристаллографіи шло непрерывно. Въ нее вновь и окончательно были введены законы геометріи. Ромэ-Делиль пытался различить основные типы среди множества кристаллическихъ многогранниковъ; у него мы видимъ первые зачатки кристаллическихъ системъ и простыхъ формъ. Продолжая идеи Деместа (1743—1783), оригинальнаго французскаго врача, подвергшаго переработкѣ первое изданіе его кристаллографіи, Ромэ-Делиль далъ нѣкоторыя правила, которыми надо пользоваться, чтобы видѣть законности, скрытыя случайнымъ несовершенствомъ кристаллическихъ формъ. Это были первыя слабыя начинанія ученія о симметріи.

16. Главное значеніе его труда однако заключается въ доказательствѣ общности закона постоянства гранныхъ угловъ для всѣхъ кристалловъ и въ введеніи въ науку гоніометра. Быстрое развитіе науки о кристаллахъ почти немедленно оставило въ сторонѣ де-Ромэ-Делиля. Сейчасъ же по выходѣ его труда, его младшій современникъ, соперникъ и соотечественникъ — аббатъ Гаюи, исходя изъ его данныхъ, далъ новый языкъ кристаллографіи, открылъ новые законы и выбравъ все цѣнное, сразу сдѣлалъ устарѣлымъ и громоздкимъ многолѣтній трудъ своего старшаго предшественника. Аббатъ Ренэ Жюстъ Гаюи (1743—1822) принадлежалъ къ тому же самому кругу лицъ, въ которомъ вращался и Ромэ-Делиль. Сотрудникъ новаго изданія Большой Энциклопедіи, онъ былъ преподавателемъ физики въ одномъ изъ связанныхъ съ Сорбонной коллежей

(Collège Lemoine) и подобно Ромэ-Делилю описывалъ, изучалъ и приводилъ въ порядокъ минералогическія собранія частныхъ любителей. Гаюи обладалъ широкимъ умомъ систематика, легко схватывалъ общіе принципы, которые позволяли разбираться въ хаосѣ природныхъ явленій. Его первыя работы вышли до появленія труда Ромэ-Делиля въ 1781 г.; въ нихъ онъ ясно выражаетъ свою теорію строенія кристалловъ, основанную на идеяхъ, которыя въ гораздо болѣе общей формѣ были высказаны Гюйгенсомъ и въ ближайшее къ Гаюи время повторены замѣчательнымъ шведскимъ ученымъ Торольдомъ Бергманномъ (1773), по слѣдамъ котораго шелъ Гаюи. Появленіе въ свѣтъ въ 1783 г. труда де Ромэ-Делиля дало ему въ руки необходимый богатѣйшій матеріалъ и немедленно уже въ слѣдующемъ 1784 г., онъ напечаталъ свой знаменитый «Essai d'une théorie sur la structure des cristaux». Въ этомъ трудѣ онъ первый ясно вывелъ основной законъ кристаллографіи—*законъ параметровъ*, т.-е. существованіе простыхъ численныхъ соотношеній между положеніемъ граней одного и того же химическаго соединенія [1]). Этимъ открытіемъ онъ сразу поставилъ на прочную почву всѣ приложенія точныхъ измѣрительныхъ соотношеній къ кристалламъ. Открытая имъ законность не была имъ вполнѣ понята; Вейссъ и Малюсъ впервые (1809) придали ей болѣе общую форму. Гаюи же предположилъ, что каждый кристаллъ составленъ изъ невидныхъ глазу кристаллическихъ молекулъ, расположенныхъ параллельными рядами и обладающихъ той же геометрической фигурой, какая получается при спайности (§ 56); изъ такого расположенія неизбѣжно вытекала соизмѣримость параметровъ для одного и того же кристалла. Это невѣрное предположеніе Гаюи является ненужнымъ суженіемъ явленія и открытый имъ законъ имѣетъ гораздо болѣе глубокое значеніе. Законъ параметровъ, т.-е. гармоническое распредѣленіе граней каждаго химическаго соединенія въ пространствѣ и иное, несоизмѣримое съ даннымъ, распредѣленіе ихъ для всякаго другого химическаго тѣла, можетъ быть поставленъ на ряду съ законностями Дальтона и Авогадро о взаимныхъ соотношеніяхъ атомовъ, вступающихъ въ химическія соединенія или съ тѣми простыми численными выраженіями, съ какими мы встрѣчаемся

---

[1]) Менѣе ясно таже идея была высказана Торольдомъ Бергманномъ въ 1773 году.

въ физическихъ явленіяхъ, порождаемыхъ волнообразными колебаніями эфира или матеріи. Во всякомъ случаѣ онъ несомнѣнно тѣсно связанъ съ молекулярной структурой вещества. Невѣрное предположеніе Гаюи о строеніи кристалловъ изъ молекулъ, обладающихъ опредѣленной, уловимой формой, не прошло однако безслѣдно; оно сразу позволило ввести вычисленія для рѣшенія разнообразныхъ вопросовъ наружной формы кристаллическихъ многогранниковъ, явилось удобной рабочей гипотезой, упростило способы обозначенія кристалловъ. Въ то же время, примѣнивъ законъ постоянства граныхъ угловъ къ мельчайшимъ частицамъ вещества, Гаюи поставилъ вопросъ о связи химическаго состава тѣла съ кристаллической формой его многогранниковъ на вполнѣ научную почву. Почти одновременно съ работами Гаюи, на границѣ XVIII—XIX столѣтій въ химіи совершался великій процессъ развитія и однимъ изъ центровъ этой «химической революціи» по выраженію Бертело, былъ кругъ тѣхъ самыхъ людей, среди которыхъ въ Парижѣ вращался Гаюи: Лавуазье, Бертоллэ, Фуркруа, Вокеленъ и др. Гаюи былъ тѣсно связанъ и близко знакомъ съ лицами, участвовавшими въ этомъ движеніи, работалъ вмѣстѣ съ Лавуазье. Горячо принявъ новыя химическія воззрѣнія, онъ воспользовался закономъ параметровъ, переработалъ огромный матеріалъ, быстро накоплявшійся со всѣхъ сторонъ благодаря интенсивному развитію естествознанія. Онъ ввелъ въ научное сознаніе еще двѣ глубокихъ, крайне важныхъ идеи: 1) развивъ мысли Деместа и де-Ромэ-Делиля, онъ утвердилъ въ наукѣ о кристаллахъ идею *симметріи:* онъ впервые замѣтилъ закономѣрную повторяемость опредѣленныхъ элементовъ многогранника и 2) онъ примѣнилъ идею симметріи не только къ формѣ многогранниковъ, но и къ *физическимъ свойствамъ* ихъ, такъ какъ ясно сознавалъ тѣсную связь между той и другими. Идея о возможности познать путемъ изученія кристалла форму атомовъ, найти овладѣвши ею новыя неизвѣстныя явленія природы, придавала своеобразную поэтическую окраску его трудамъ; она вдохнула жизнь въ колоссальную, тяжелую, мелочную работу, сдѣланную въ это время Гаюи и его ближайшими послѣдователями. Гаюи сразу сдѣлался центромъ научной міровой работы въ этой области и все время оставался на высотѣ современнаго ему уровня науки. Глубокимъ старцемъ, незадолго до смерти, въ новыхъ изданіяхъ Кристаллографіи (1822) и въ четырехтомной

Минералогіи (1822—1823) онъ далъ доказательство неизсякшихъ рабочей силы, свѣжести ума и способностей, пониманія и переработки новыхъ теченій.

17. Геометрическая кристаллографія послѣ Гаюи. Однако ему не было суждено обогатить науку въ долгій промежутокъ времени послѣ 1784 г. новыми широкими открытіями. Воспользовавшись работой де-Ромэ-Делиля, онъ направилъ ее въ другую сторону—въ сторону изученія внутренняго строенія вещества. Одновременно однако не замерло и то теченіе выразителемъ котораго явился де-Ромэ-Делиль, ставившее на первое мѣсто изученіе внѣшней формы кристаллическихъ многогранниковъ. Оно выразилось какъ въ точномъ описаніи наружной формы наблюдаемыхъ тѣлъ, такъ и въ блестящей разработкѣ геометрической кристаллографіи. Немногіе французскіе ученые приняли участіе въ этой работѣ, какъ, напр., ученикъ де-Ромэ-Делиля графъ де-Бурнонъ (1751—1825) или А. Леви (1794—1841). Главный же центръ этого научнаго движенія перенесся въ Германію—гдѣ въ многочисленныхъ Университетахъ образовались каѳедры минералогіи и ихъ заняли точные и страстные изслѣдователи кристалловъ. Во главѣ ихъ долженъ быть поставленъ кристаллографъ и натурфилософъ Христіанъ - Самуилъ Вейссъ, профессоръ Берлинскаго Университета (1780—1851); онъ положилъ начало точному геометрическому изслѣдованію кристалловъ и собралъ огромный матеріалъ наблюденій. Натурфилософъ по направленію, противникъ атомистики и оригинальный представитель своеобразныхъ динамическихъ воззрѣній на строеніе вещества, Вейссъ первый положилъ начало ученію о *векторахъ* въ кристаллѣ—введя въ кристаллографію ученіе объ осяхъ (1804—1809). Въ своихъ работахъ онъ развилъ мысли оригинальнаго натурфилософа, кристаллографа и ботаника, профессора въ Эрфуртѣ — І. Я. Бернгарди (1770—1850). Бернгарди отличался чрезвычайно разносторонимъ и цѣльнымъ міровоззрѣніемъ и шелъ въ своихъ работахъ самостоятельнымъ, независимымъ отъ другихъ изслѣдователей путемъ. Ему ничего не удалось сдѣлать крупнаго, законченнаго, но какъ въ кристаллографіи, такъ и въ ботаникѣ онъ стоялъ далеко впереди своего времени, всюду прокладывалъ новые пути, высказывалъ новыя мысли и оказывалъ несомнѣнное вліяніе на ходъ современнаго ему научнаго развитія. Онъ будилъ мысль изслѣдователей. Идя по его слѣдамъ

Вейссъ подвергъ критикѣ теорію Гаюи и указалъ на полную независимость открытаго Гаюи закона параметровъ отъ того или иного представленія о строеніи кристалла. Въ тѣ же года онъ началъ развивать идею о расположеніи плоскостей въ кристаллѣ по извѣстнымъ поясамъ, идею *зонъ*; открытыя имъ при этомъ законности были позже связаны Нейманномъ (1823) съ закономъ параметровъ, являются особымъ, своеобразнымъ его выраженіемъ. Въ 1814 г. онъ впервые вводитъ понятіе о *геміэдріи* и кладетъ начало ученію о симметріи кристаллическихъ многогранниковъ. Въ 1815 г. развивая идеи Бернгарди (1807), онъ точно устанавливаетъ тѣ 6 кристаллическихъ *системъ*, которыя и теперь являются основой описательной кристаллографіи. Въ рядѣ блестящихъ работъ, въ той же первой четверти XIX вѣка, Вейссъ положилъ начало геометрическому изученію законовъ *двойниковъ* въ связи съ идеей о симметріи кристаллическихъ тѣлъ. Эта идея *симметріи* была имъ выражена очень туманно, хотя она вытекала изъ его философскихъ воззрѣній. Вейссъ не понялъ значенія ея широкаго и блестящаго математическаго развитія, которое лежитъ въ основѣ современныхъ намъ ученій о кристаллахъ; онъ не дошелъ до ея окончательнаго выраженія. Въ 1830-хъ гг. она была блестяще обработана его ближайшими учениками и послѣдователями— Гесселемъ и Франкенгеймомъ; однако ихъ работы были также не поняты Вейссомъ, какъ и другими современными ему кристаллографами.

18. Изящество и простота открытыхъ Вейссомъ законностей сразу вызвали необычайно быстрое развитіе геометрической кристаллографіи. Одни и тѣ же явленія получили и здѣсь, подобно тому какъ мы это нерѣдко наблюдаемъ въ исторіи геометріи, совершенно различный обликъ и различную обработку въ зависимости отъ принятыхъ въ основу правильностей. Изъ идей Вейсса вышли два теченія геометрической кристаллографіи. Съ одной стороны началось развитіе ученія о зонахъ, вызвавшее своеобразное приложеніе аналитической и проективной геометріи къ ученію о кристаллахъ. Разработкой кристаллографіи въ этомъ направленіи почти одновременно занялись Нейманнъ въ Кенигсбергѣ (1798—1895) и Миллеръ въ Кембриджѣ (1801—1880). Введя и разработавъ особые пріемы символическаго обозначенія кристаллическихъ плоскостей (индексы), идея котораго была дана Уэвелемъ (1825), Миллеръ (1835 и сл.) приложилъ къ изученію кристалла начала сферической проекціи; онъ чрезвы-

Библиотека Института Нар. Хозяйства им. ПЛЕХАНОВА
Уч. No
Пр. 36 г.

чайно упростилъ методы и пріемы вычисленій и нашелъ многочисленныя любопытныя соотношенія въ зональной группировкѣ кристаллическихъ граней. Долгое время, однако, идеи Миллера оставались въ сторонѣ отъ общаго теченія научной работы. Ихъ принимали немногіе англійскіе и американскіе кристаллографы. На континентѣ Европы получило перевѣсъ другое теченіе, которое было представлено школой нѣмецкихъ кристаллографовъ; во главѣ ея долженъ быть поставленъ Карлъ-Фридрихъ Науманнъ, профессоръ въ Лейпцигѣ (1797 — 1873), развившій дальше идеи Вейсса въ связи съ закономъ параметровъ и правильностію наружной формы многогранниковъ. Многочисленные кристаллографы всего міра находились подъ его вліяніемъ; его идеи господствовали и въ нашей странѣ, гдѣ ихъ представляли ученикъ Вейсса А. Купфферъ (1799—1865) и Н. И. Кокшаровъ (1818 — 1893), быстро отодвинувшіе мало оригинальныхъ послѣдователей Гаюи. Оба теченія геометрической кристаллографіи опирались на неясно выраженное ученіе о симметріи.

19. Такимъ образомъ къ началу 1830-хъ годовъ въ наукѣ одновременно существуютъ совершенно различныя переработки кристаллографіи, каждая изъ которыхъ представляетъ законченное цѣлое, позволяющее точно и правильно, хотя различными путями, объяснять наблюдаемые факты. Небольшая группа послѣдователей Гаюи, почти исключительно связанная съ французскимъ ученымъ міромъ, продолжаетъ развивать дальше сложныя схемы молекулярныхъ структуръ. Немногочисленные ученые Кембриджской школы группируются главнымъ образомъ въ Англіи и Америкѣ, вырабатывая то изложеніе, которое господствуетъ въ настоящее время. Широко развилась формальная кристаллографія, тѣсно связанная съ жизнью нѣмецкихъ университетовъ. Въ сторонѣ отъ этихъ теченій чисто дедуктивнаго характера находились немногіе кристаллографы эмпирики. Они пытались уменьшить схематизирующее вліяніе дедуктивнаго метода и геометрической разработки физическаго явленія. Они стояли внѣ тѣсной зависимости отъ тѣхъ или иныхъ геометрическихъ воззрѣній. Таковы были Брейтгаупть (1791 — 1873) во Фрейбергѣ и Мосъ (1773—1839) въ Вѣнѣ. Разработка геометрическихъ правильностей въ это время составляла только одну часть научнаго развитія; одновременно сильно разросталось изученіе физическихъ и хими-

ческихъ свойствъ кристалловъ, какъ природныхъ, такъ и искусственныхъ. Относительно немногочисленныя научныя силы подавлялись сырымъ матеріаломъ, приносимымъ минералогіей и химіей, количество котораго все увеличивалось, благодаря основной идеѣ описательнаго естествознанія, его стремленія охватить своими схемами все сущее, ничего не выпуская и не выбрасывая. Особое вниманіе невольно направлялось на нахожденіе правильностей физическихъ или химическихъ, аналогичныхъ закону зонъ или параметровъ. Къ 30-мъ годамъ XIX столѣтія такія правильности были найдены.

20. Созданіе кристаллооптики. Особенно два отдѣла—оптика и химическая кристаллографія достигли значительнаго развитія. Къ срединѣ XVIII столѣтія, главнымъ образомъ подъ вліяніемъ идей Ньютона, въ наукѣ закрѣпилось воззрѣніе на свѣтъ, какъ на проявленіе истеченія матеріи изъ свѣтящихся тѣлъ. Болѣе правильныя теоріи Гюйгенса (1691) о свѣтѣ, какъ волнообразномъ движеніи эѳира, были забыты до самаго конца XVIII столѣтія. Только немногіе отдѣльные ученые, главнымъ образомъ въ средѣ Петербургской академіи наукъ, какъ Л. Эйлеръ и М. В. Ломоносовъ въ это время подвергали критикѣ господствовавшія воззрѣнія и указывали на то, что факты отвѣчаютъ ближе и точнѣе волнообразной теоріи Гюйгенса. Физики рѣшительно стояли на почвѣ теоріи Ньютона, лишь немногіе малооригинальные, пережившіе свое время картезіанцы переносили черезъ чуждый имъ XVIII вѣкъ идею волнообразнаго движенія свѣта по схемѣ Декарта. Въ средѣ Петербургской академіи теорія Гюйгенса имѣла своего послѣдователя и выразителя до самаго конца столѣтія въ лицѣ Эйлера, но Эйлеръ не работалъ въ этой области, его ученики придерживались другихъ взглядовъ. Петербургскіе академики не приняли доводовъ Эйлера и Ломоносова. Въ 1784 г. черезъ годъ послѣ смерти Эйлера въ похвальномъ ему словѣ, въ засѣданіи Петербургской Академіи, произнесенномъ Фуссомъ, эта сторона его работъ отмѣчается съ большой осторожностью и не подчеркивается. А еще позже, въ началѣ XIX столѣтія, Петербургскіе академики одними изъ послѣднихъ вполнѣ признали окончательное крушеніе теоріи Ньютона и еще въ 1826 г. стояли всецѣло на ея почвѣ. Между тѣмъ въ годъ смерти Эйлера уже накоплялись факты, подготовившіе великую научную революцію. Въ этотъ годъ началъ свои работы Гаюи,

который вскорѣ указалъ на трудность объясненія оптическихъ свойствъ кристалловъ по теоріи Ньютона и на бо́льшую вѣроятность гипотезы Гюйгенса (1788). Онъ первый подмѣтилъ фактъ, что тѣла правильной системы не даютъ двупреломленія. Въ самомъ концѣ столѣтія въ Англіи начались работы Т. Юнга, который ввелъ идею объ интерференціи и въ рядѣ работъ подвергъ рѣзкой критикѣ воззрѣнія Ньютона. Но только въ 1819 г.—послѣ того, какъ Френель, изучая явленія интерференціи поляризованнаго свѣта, развилъ идею о поперечности колебаній эѳира,—оказалось возможнымъ приложить теорію волнообразнаго колебанія свѣта къ объясненію всѣхъ наблюдаемыхъ явленій [1]). Свѣтовыя свойства кристалловъ были выяснены чрезвычайно быстро въ теченіе немногихъ лѣтъ, трудами гл. обр. англійскихъ и французскихъ физиковъ. Оптика кристалловъ сразу стала на прочную почву.

21. Работы шли въ двухъ направленіяхъ. Съ одной стороны открывались новыя явленія, накоплялись аналогичные факты и эмпирически отыскивались различные классы кристалловъ. Эти оптическіе классы кристаловъ сравнивались съ системами, выведенными изъ однихъ геометрическихъ свойствъ. Такимъ чисто индуктивнымъ путемъ работали какъ послѣдователи Гюйгенса, такъ и Ньютона—Гаюи, Малюсъ, Біо, Араго во Франціи, Брюстеръ и Гершель въ Англіи. Впервые Гаюи выдѣлилъ *оптически изотропные* кристаллы правильной системы, позже Бернгарди нашелъ *оптическую ось* въ тѣлахъ одноосныхъ. Малюсъ открылъ тѣла *двуосныя*. Болѣе всѣхъ выдвинулись работы талантливаго экспериментатора шотландца Давида Брюстера (1781—1868). Только послѣ его работъ стало возможнымъ отдѣленіе двуосныхъ и одноосныхъ системъ и отличеніе съ оптической точки зрѣнія тѣлъ ромбической, моноклинической и триклинической системъ. Брюстеръ первый кладетъ начало (1813—1818) изученію интерференціонныхъ фигуръ кристалловъ въ сходящемся свѣтѣ; одновременно съ Біо онъ открываетъ фигуры одноосныхъ кристалловъ, а позже одинъ—двуосныхъ. Эти явленія сейчасъ же были подтверждены другими изслѣдователями и въ 1820 г. Д. Гершель опредѣлилъ фигуру ихъ для двуосныхъ тѣлъ, какъ

---

[1]) Эта идея о поперечности колебаній эѳира нѣсколько раньше (1817) была высказана Т. Юнгомъ.

лемнискату. Объясненіе ихъ на основаніи теоріи Френеля дано лишь въ 1830-хъ гг. Эри и Нейманномъ.

Во всѣхъ областяхъ физики кристалловъ Брюстеръ собралъ огромное количество новыхъ фактовъ, многіе изъ которыхъ не вошли еще въ научное сознаніе. И между тѣмъ до конца жизни, до 1868 г., неуклонно продолжая работать въ этой области, упрямый шотландецъ Брюстеръ не признавалъ господствующей теоріи и оставался послѣдователемъ теоріи Ньютона. Послѣднюю точку опоры онъ искалъ въ разработкѣ явленій свѣченія тѣлъ — фосфоресценціи, флюорисценціи и т. д., тѣхъ явленій, которыя до сихъ поръ не поддались правильному и точному объясненію съ точки зрѣнія волнообразной теоріи свѣта; въ этихъ явленіяхъ на нашихъ глазахъ въ самое послѣднее время возродились было попытки объясненій съ помощью старой теоріи истеченія Ньютона.

22. Почти одновременно въ 1811 г. Араго нашелъ въ кристаллахъ и другое явленіе лежащее въ основѣ нашихъ воззрѣній въ кристаллооптикѣ. Въ кварцѣ, въ пластинкѣ, выточенной перпендикулярно вертикальной оси онъ открылъ *вращеніе* плоскости поляризаціи свѣта. Явленіе было долго не понято и сперва детально изучено Ньютоніанцами, Біо и Брюстеромъ. Правильное объясненіе дано позже Френелемъ. Наибольшее значеніе съ точки зрѣнія строенія вещества имѣла открытая Д. Гершелемъ въ 1821 г. зависимость между направленіемъ вращенія плоскости поляризаціи въ кристаллахъ и ихъ наружной формой. Гершель замѣтилъ, что правовращающіе кварцы развиваютъ правыя простыя формы, а лѣвовращающіе лѣвыя. Долгое время это открытіе, позже расширенное Пастеромъ и Марбахомъ, оставалось совершенно въ сторонѣ отъ нашихъ представленій о строеніи вещества и только въ послѣдніе года выяснилось его глубокое значеніе и тѣсная связь съ опредѣленнымъ характеромъ симметріи кристалла.

Въ то же приблизительно время встрѣчено и другое явленіе. Въ 1808 г. Кордье замѣтилъ разноцвѣтность нѣкоторыхъ кристалловъ; это свойство было скоро изучено болѣе тщательно Брюстеромъ и Гершелемъ, причемъ оказалось что оно находится въ тѣсной связи съ симметріей кристалла и поляризаціей свѣта. Этими работами было положено начало ученію о *плеохроизмѣ*, нѣкоторыя явленія котораго пока не поддаются существующимъ свѣтовымъ теоріямъ, т. к., вѣ-

роятно, зависятъ отъ рѣзкихъ и своеобразныхъ вліяній вѣсомой матеріи на эѳиръ.

23. Всѣ эти работы имѣли чисто эмпирическій характеръ. Открытія дѣлались, наука развивалась и двигалась путемъ обсужденія вновь открываемыхъ явленій, исходя какъ изъ вѣрныхъ, такъ и изъ ложныхъ теорій. Но вскорѣ нашлись люди, которые сразу сумѣли овладѣть накоплявшимся матеріаломъ и придать ему форму стройной и изящной научной теоріи. Такого рода людьми были въ началѣ независимо другъ отъ друга работавшіе Т. Юнгъ и О. К. Френель. Заслуги ихъ съ точки зрѣнія разработки принциповъ волнообразной теоріи свѣта могутъ быть сравниваемы, но въ оптикѣ кристалловъ Френель занимаетъ совершенно исключительное мѣсто и теоретическое значеніе его работъ не было ясно ни ему самому, ни ближайшимъ къ нему поколѣніямъ. О. К. Френель (1788—1827), инженеръ по профессіи, началъ заниматься вопросами оптики случайно. Въ 1814 г. онъ, какъ воинствующій роялистъ, былъ отставленъ отъ службы; свободное время онъ употребилъ на занятіе наукой. Еще къ началу 1815 г. онъ не зналъ, что за явленіе называется поляризаціей свѣта, въ томъ же году однако появились уже его первыя теоретическія работы, въ 1818—1819 всѣ главныя положенія его теоріи были даны и блестяще, своеобразно разработаны, а между 1821 — 1823 годами выяснены основныя положенія теоріи двупреломленія. Но для изученія строенія вещества не столько важна математическая разработка основныхъ положеній волнообразнаго колебанія свѣта, какъ введеніе Френелемъ *теоріи эллипсоида* для объясненія свѣтовыхъ явленій кристалла. Зачатки этихъ воззрѣній мы встрѣчаемъ еще у Гюйгенса; но только послѣ введенія ихъ Френелемъ въ кристаллооптику выяснилось, что по всѣмъ физическимъ свойствамъ—свѣтовымъ, тепловымъ, электрическимъ, магнитнымъ, упругости—твердое однородное вещество распадается на три класса, законы которыхъ могутъ быть выражены шаромъ, эллипсоидомъ вращенія или въ общей формѣ эллипсоидомъ о трехъ осяхъ. Мы знаемъ теперь, что это приложимо ко всѣмъ тѣмъ физическимъ явленіямъ, во время которыхъ однородность строенія твердаго вещества не нарушается. Всѣ такія явленія могутъ быть выражены аналогичными формулами; къ нимъ могутъ быть приложены всѣ разсужденія, выведенныя по аналогіи

съ любымъ наиболѣе изученнымъ свойствомъ. Здѣсь мы встрѣчаемся съ любопытнымъ и важнымъ для теоріи познанія случаемъ въ исторіи науки—примѣромъ области, гдѣ законно господствуетъ научная аналогія, какъ могучій методъ проникновенія въ неизвѣданное. Съ этой точки зрѣнія исторія физической кристаллографіи крайне важна и поучительна.

Только послѣ этихъ работъ Френеля правильно и окончательно выяснилось значеніе наружной геометрической формы кристалловъ—простого выразителя одного изъ классовъ физическихъ явленій вещества, т. к. кристаллъ по другимъ своимъ свойствамъ не даетъ и слѣда поліэдрическаго внутренняго строенія. Какъ поліэдрическая структура кристалла, такъ и эллипсоидальное его строеніе зависитъ отъ метода работы и свойствъ нашего мышленія, но эта истина проникаетъ и овладѣваетъ наукой медленно, только теперь.

24. Свѣтовыя явленія обладаютъ поляризаціей, связанной съ поперечнымъ колебаніемъ эѳира. Эти явленія поляризаціи, замѣченныя, но не понятыя Бартолиномъ и Гюйгенсомъ, были впервые открыты Малюсомъ (1808). Френель точно выяснилъ ихъ тѣсную связь съ кристаллическимъ строеніемъ, онъ указалъ, что кристаллъ оказываетъ рѣзко различное сопротивленіе движенію волнъ въ тѣсной зависимости отъ положенія къ его элементамъ симметріи такъ называемой плоскости поляризаціи, т. е. траекторій точекъ свѣтового эѳира: онъ впервые съ этой точки зрѣнія далъ теорію распространенія лучей съ круговой поляризаціей. Какъ бы ни относиться къ будущей судьбѣ теоріи Френеля, если даже основанія его теоретическихъ воззрѣній на структуру свѣтового эѳира и не вѣрны—общее положеніе, которое сводитъ всѣ эти явленія на законъ эллипсоида,—т. е. даетъ выраженіе яснаго и опредѣленнаго математическаго характера—несомнѣнно навсегда останется. Къ 1830 годамъ работа въ этой области была закончена; теоретическія возраженія противъ теоріи Френеля только что зарождались. Оптика кристалловъ трудами Френеля достигла блестящаго состоянія и сразу стала рядомъ съ наиболѣе обработанными частями физики, механики, кристаллографіи. Въ ней начала господствовать дедукція. Изученіе другихъ физическихъ явленій вскорѣ подтвердило общность закона эллипсоида, сперва для тепловыхъ явленій, благодаря экспериментальнымъ и теоретическимъ работамъ Митчерлиха (1825) и Нейманна.

25. Развитіе химической кристаллографіи до середины XIX вѣка. Къ тому же времени (къ 1830-мъ годамъ) выработались обобщенія въ другой области, въ области химическихъ свойствъ кристалловъ, которыя въ началѣ казались болѣе прочными, чѣмъ это представляется въ настоящее время. Въ послѣдние года здѣсь быстро исчезли и стали сомнительными нѣкоторыя законности, которыя еще не такъ давно казались точно и незыблемо установленными. Въ первую половину XIX вѣка господствовало ученіе объ изоморфизмѣ; оно оказало глубокое и разнообразное вліяніе въ химіи, кристаллографіи и минералогіи и вызвало много, нерѣдко важныхъ, работъ и открытій. Дальнѣйшее развитіе близкихъ научныхъ дисциплинъ совершенно измѣнило взглядъ на изоморфизмъ и отъ него остались лишь отдѣльныя части, которыя раньше считались придатками, а само основное явленіе получило другой обликъ и выраженіе. Однако и въ эпоху господства изоморфизма существовали отдѣльные ученые, которые стояли особнякомъ или составляли немногочисленную оппозицію господствующему теченію; роль этихъ ученыхъ намъ представляется нынѣ совершенно иначе, чѣмъ ихъ современникамъ и въ изложеніи научнаго развитія мы далеко отходимъ въ своемъ представленіи отъ того, что было въ сознаніи поколѣній ученыхъ, ближайшихъ къ Митчерлиху. Въ этомъ историческомъ наброскѣ химической кристаллографіи я не имѣю въ виду дать картину хода ея научнаго развитія, изложеніе ошибокъ, опытовъ, пробъ и усилій, приведшихъ къ новой мысли въ этой области; моей задачей является лишь прослѣдить зарожденіе и развитіе идей и воззрѣній, которыя нынѣ представляются вѣрными, живутъ и развиваются въ современной научной средѣ. Я оставляю въ сторонѣ отжившія вѣянія и пережитыя научныя фазы, хотя бы онѣ имѣли до сихъ поръ послѣдователей и сыграли крупную роль въ прошломъ науки.

26. Въ концѣ XVIII и въ началѣ XIX столѣтій Гаюи высказалъ общее положеніе, которое долгое время опредѣляло характеръ научной работы въ этой области. Онъ исходилъ изъ вѣрной мысли, которая болѣе или менѣе ясно уже высказывалась Бойлемъ, Гульельмини, де Ромэ-Делилемъ, Деместомъ, что *кристаллическая форма есть постоянное и неизмѣнное свойство химическаго соединенія.* По его мнѣнію кристаллическая форма выражаетъ ясно и точно атомное строеніе матеріи. Почти одновременно съ обобщеніемъ

Гаюи появились работы Дальтона, быстро воспринятыя французскими химиками, въ кругу которыхъ вращался Гаюи. По этимъ воззрѣніямъ, въ формулѣ каждаго химическаго соединенія законнымъ образомъ отражается атомистическое строеніе вещества. Основная идея Гаюи по этому логически понятна. Точно такъ же, какъ каждое химическое соединеніе выражается опредѣленной формулой, для него неизмѣнной, точно также оно обладаетъ и неизмѣнной для него, отличной отъ другихъ тѣлъ, кристаллической фигурой. И то и другое есть простое выраженіе его атомистическаго строенія. Возраженія противъ идей Гаюи вышли изъ круга противниковъ Дальтона. Среди нихъ наиболѣе талантливымъ и глубокимъ былъ одинъ изъ величайшихъ ученыхъ этого времени, сотрудникъ и другъ Лавуазье—Клодъ Луи Бертоллэ (1748—1822). Въ возраженіяхъ Дальтону и его послѣдователямъ, Бертоллэ выдвинулъ значеніе растворовъ и другихъ неопредѣленныхъ химическихъ соединеній, явился основателемъ и творцомъ современныхъ ученій общей химіи. Въ возраженіяхъ Гаюи въ 1803 г. онъ впервые опредѣленно указалъ: 1) на существованіе различныхъ несоизмѣримыхъ кристаллическихъ формъ для одного и того же химическаго соединенія и 2) на существованіе однородныхъ кристалловъ, составъ которыхъ не можетъ быть выраженъ атомными формулами. Первое явленіе представляетъ то, что мы называемъ теперь полиморфизмомъ, второе—развилось въ ученіе объ изоморфныхъ смѣсяхъ и на его изслѣдованіи сосредоточиваются надежды будущаго развитія механики твердаго вещества.

27. Ученіе о полиморфизмѣ. Развитіе ученія о полиморфизмѣ привело не къ тѣмъ результатамъ, которыхъ ожидалъ Бертоллэ. Еще въ концѣ XVIII столѣтія, въ 1788 г., Клапротъ открылъ, что составъ кальцита и арагонита выражается одной и той же формулой, но что эти два тѣла кристаллографически совершенно различны. Къ началу XIX вѣка они были подвергнуты многочисленнымъ изслѣдованіямъ и вызвали оживленный научный споръ, продолжавшійся до 1820-хъ гг. Въ эти года было открыто еще нѣсколько веществъ съ тѣми же свойствами. Но только въ 1821 г. молодой ученикъ Берцеліуса Эйльгардъ Митчерлихъ (1794—1863) въ блестящихъ работахъ положилъ конецъ отрицанію факта, открывъ явленія полиморфизма въ различныхъ соляхъ и въ сѣрѣ. Митчерлихъ первый

указалъ на рѣшающее значеніе температуры для полученія любой полиморфной разности; но онъ не понялъ значенія этого наблюденія и всѣ теоретическія попытки объяснить явленія полиморфизма, сдѣланныя имъ и его многочисленными послѣдователями были неудачны. Полиморфныя тѣла считались ими непонятнымъ, рѣдкимъ, болѣе или менѣе случайнымъ явленіемъ въ царствѣ кристалловъ. Однако уже къ 1830-мъ гг. относятся замѣчательныя работы Бреславльскаго профессора М. Франкенгейма (1801—1869), талантливаго и самостоятельнаго ученаго, стоявшаго въ сторонѣ отъ общаго теченія науки и проводившаго въ своихъ работахъ мысли, которыхъ мы придерживаемся въ настоящее время, но которыя не оказали вліянія на воззрѣнія его времени. Въ этихъ работахъ Франкенгеймъ впервые свелъ явленія полиморфизма на различныя состоянія твердаго тѣла, указалъ на ихъ зависимость отъ температуры, на полную (не только формальную) аналогію точекъ перехода съ точками плавленія, кипѣнія и т. д. Уже Франкенгеймъ замѣтилъ, что полиморфизмъ есть чрезвычайно распространенное свойство тѣлъ. Онъ вновь придалъ силу идеѣ Гаюи утверждавшаго, что для каждаго химическаго соединенія возможно только одно опредѣленное кристаллическое строеніе, введя въ это воззрѣніе поправку: при данныхъ температурѣ и давленіи. Въ развитіи этихъ идей Франкенгейма заключается будущее нашей науки.

28. **Изоморфныя смѣси.** Бертоллэ одновременно обратилъ вниманіе и на другое явленіе въ мірѣ кристалловъ, противорѣчавшее, по его мнѣнію, атомистической структурѣ химическихъ тѣлъ—на способность нѣкоторыхъ веществъ образовывать такъ называемыя *изоморфныя смѣси*. Это явленіе было уже извѣстно ученымъ XVIII столѣтія—Монэ, де Ромэ Делилю, Леблану. Лебланъ продѣлалъ даже въ этой области рядъ разнообразныхъ и чрезвычайно любопытныхъ опытовъ. Но, конечно, эти наблюденія могли получить значеніе только послѣ того, какъ формула химическихъ соединеній стала выражаться въ простыхъ атомныхъ отношеніяхъ, т. е. въ XIX столѣтіи, послѣ работъ Дальтона. Принявъ воззрѣніе Дальтона и приложивъ теоріи новой химіи къ кристаллографіи, Гаюи выставилъ положеніе, что каждый кристаллъ подчиняющійся закону параметровъ (§ 16), выражается опредѣленной и неизмѣнной атомной формулой. Противъ этого положенія выступилъ Бертоллэ. Въ рядѣ

тщательныхъ работъ — самаго Бертоллэ и Бедана въ Парижѣ, Фукса и Бергарди въ Германіи, было неопровержимо доказано существованіе кристалловъ, не выражаемыхъ атомной формулой. Однако, современники не приняли этихъ выводовъ и, лишь послѣ работъ Митчерлиха, въ серединѣ 1820-хъ гг., явленіе изоморфныхъ смѣсей вошло прочно и безповоротно въ научный обиходъ. Митчерлихъ разсматривалъ такія смѣси какъ особыя явленія, сопровождающія «изоморфизмъ», т. е. близость химическаго состава и кристаллической формы. Онъ пытался свести ихъ на особыя свойства нѣкоторыхъ элементовъ способныхъ, какъ онъ говорилъ, изоморфно замѣщать другъ друга, т. е. давать соединенія почти идентичной кристаллической структуры при замѣнѣ въ химической формулѣ одного такого элемента другимъ. Эта туманная и искусственная идея Митчерлиха сразу встрѣтилась съ многочисленными исключеніями и въ теченіе десятковъ лѣтъ вызвала безконечный рядъ попытокъ примиреній ея съ опытомъ и наблюденіемъ. Несмотря на все остроуміе, тонкость анализа, неизмѣримый трудъ и огромную выдержку, столь привычные натуралистамъ XIX столѣтія, въ концѣ концовъ всѣ эти попытки оказались тщетными и въ настоящее время ученіе Митчерлиха медленно, съ борьбой, но неудержимо отходитъ въ область прошедшаго. Оно замѣняется другимъ воззрѣніемъ, которое ставитъ изоморфныя смѣси въ тѣсную связь съ растворами. Эта идея была уже развита съ необычайной прозорливостью Бертоллэ въ его Химической Статикѣ почти 100 лѣтъ назадъ, и въ концѣ 1830-хъ гг. повидимому, самостоятельно начала проявляться и проводиться въ работахъ Франкенгейма. Но помимо такихъ принципіально противорѣчащихъ имъ воззрѣній, идеи Митчерлиха и его послѣдователей встрѣтили множество возраженій, касавшихся тѣхъ или иныхъ высказываемыхъ обобщеній. Среди нихъ наибольшее значеніе имѣютъ возраженія противъ мысли Митчерлиха, будто только соединенія аналогичнаго состава могутъ образовывать изоморфныя смѣси. Впервые, также въ 1830 гг., начались многолѣтнія работы съ цѣлію опровергнуть эту идею Митчерлиха; онѣ производились здѣсь въ Москвѣ, въ частной лабораторіи аптеки, въ свободное отъ тяжелаго заработка время, неутомимымъ и замѣчательнымъ изслѣдователемъ русскихъ минераловъ И. Р. Германномъ (1805—1879), заслуги котораго далеко не оцѣнены по достоинству до сихъ поръ и ждутъ признанія. Германнъ

пытался замѣнить изоморфизмъ Митчерлиха не вполнѣ удобной теоріей гетеромеріи, но основная мысль его—объ образованіи изоморфныхъ смѣсей химически различными по формулѣ соединеніями—совершенно правильна и въ настоящее время все болѣе пріобрѣтаетъ научную почву.

29. Созданіе теоріи кристаллическихъ строеній. Такимъ образомъ, въ 1830—1840 годахъ вездѣ, во всѣхъ областяхъ кристаллографіи научная мысль достигла блестящихъ результатовъ и отдѣльные изслѣдователи подошли къ явленіямъ, которыя требовали синтеза, т. к. представляли уже тогда крупнѣйшія обобщенія достигнутыя въ кристаллографіи. Пользуясь всѣмъ опытнымъ матеріаломъ уже тогда, начиная съ 1830-хъ гг. и въ ближайшее десятилѣтіе, отдѣльные изслѣдователи достигаютъ болѣе широкихъ представленій, пытаются дать общую теорію строенія кристалической матеріи. Всѣхъ этихъ изслѣдователей постигла одинаковая судьба: они были признаны долгое время спустя, много лѣтъ послѣ смерти. Труды нѣкоторыхъ изъ нихъ, напримѣръ Гесселя, были извлечены изъ забвенія уже тогда, когда вся сдѣланная ими работа была передѣлана учеными, стоявшими отъ нихъ независимо. Въ области научнаго синтеза въ кристаллографіи первыми самостоятельными работниками были Делафоссъ и его ученикъ Бравэ—исходившіе изъ идей Гаюи,—Гессель и Франкенгеймъ, независимо разработывавшіе и продолжавшіе воззрѣнія Вейсса. Въ это время были впервые изслѣдованы основные принципы симметріи, регулирующіе всѣ физическія свойства кристалловъ и правильно поняты многочисленные случаи геміэдрій, также какъ гемиморфизмъ, который до тѣхъ поръ считался чѣмъ-то случайнымъ. Исходя изъ законовъ симметріи И. Ф. Гессель (1796—1872) въ Марбургѣ впервые открылъ среди кристалловъ независимые немногіе опредѣленные классы, 32 строенія, и далъ ясное представленіе о всѣхъ возможныхъ среди нихъ многогранникахъ. Исходя изъ тѣхъ же принциповъ, имъ независимо открытыхъ нѣсколько позже въ 1840—50 гг., Бравэ перенесъ вопросъ глубже и въ ясныхъ, простыхъ типахъ далъ законы поліэдрическаго распредѣленія молекулярныхъ системъ твердаго тѣла. Огюстъ Бравэ (1811—1863) былъ сперва морскимъ офицеромъ, потомъ профессоромъ математики и астрономіи. Онъ занимался главнымъ образомъ вопросами физической географіи и метеорологической оптики и случайно пере-

шелъ къ изученію кристалловъ, при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ о кристаллизаціи льда, необходимыхъ ему для объясненія круговъ около солнца и луны. Онъ смотрѣлъ на природу глазами геометра и это Платоново чувство природы проявилось какъ въ одной изъ его первыхъ научныхъ работъ о симметріи въ растеніяхъ, такъ въ его трудахъ по метеорологической оптикѣ, въ воззрѣніяхъ на кристаллы. Въ кристаллографическихъ работахъ О. Бравэ проявилъ необычайную ясность, изящество и глубину мысли и его мемуары, несмотря на всѣ новыя работы въ этой области, сохранили до сихъ поръ свое значеніе. Ему не удалось закончить блестяще начатое дѣло. Потерявъ вскорѣ единственнаго малолѣтняго сына, онъ думалъ забыться въ научной работѣ и здѣсь среди усиленныхъ занятій, вдругъ потерялъ память и черезъ нѣсколько лѣтъ умеръ въ полномъ и мучительномъ сознаніи своего несчастія.

Ни Делафоссъ, ни Франкенгеймъ не достигли такихъ общихъ результатовъ, какъ Гессель и Бравэ. Забытыя въ свое время работы ихъ возродились въ 1870-хъ годахъ. Къ этому времени въ 1865 г. петербургскій академикъ А. В. Гадолинъ (1828—1893) въ замѣчательно стройной работѣ вывелъ вновь инымъ путемъ основныя явленія симметріи и 32 класса кристалловъ; во Франціи начались блестящія изслѣдованія послѣдователя и продолжателя Бравэ—Э. Малляра; въ Германіи Л. Зонке (1842—1898), развивая идеи натурфилософа Винера, пытался дать теорію строенія, исходя изъ общихъ законовъ правильнаго распредѣленія въ пространствѣ точекъ, безъ нарушенія однородности, при сохраненіи между ними хотя бы небольшихъ неизмѣнныхъ разстояній.

Съ тѣхъ поръ за послѣдніе 20 лѣтъ теорія кристаллическаго строенія достигла чрезвычайно широкаго и полнаго развитія. Здѣсь появились (ср. § 18) подобно тому, какъ это мы видѣли въ исторіи геометрической кристаллографіи, многочисленныя и разнообразныя обработки съ помощью разныхъ пріемовъ однихъ и тѣхъ же вопросовъ. Среди этихъ изслѣдованій видное мѣсто занимаютъ работы ученика Гадолина—Е. С. Федорова, рѣшившаго вопросъ въ наиболѣе общей формѣ и пытающагося проложить новые дальнѣйшіе пути въ туманное будущее, изслѣдованія чистаго математика Шенфлисса и работы Кюри, ученика Малляра, который въ немногихъ, но глубокихъ замѣткахъ далъ правильное толкованіе принципамъ и работамъ Бравэ.

Побѣда теоріи строенія кристалловъ, ея развитіе принадлежитъ нашему времени; она проникаетъ и переработываетъ всѣ открываемыя явленія. Въ общемъ, основные результаты въ этой области достигнуты. Здѣсь возможна и усиленно продолжается лишь детальная разработка частностей, но вліяніе этихъ воззрѣній на развитіе науки еще не достигло предѣла и въ области химической кристаллографіи лежитъ почти не затронутое поле изслѣдованій.

Въ результатѣ этихъ работъ мы имѣемъ полную и точную геометрическую теорію распредѣленія кристаллическихъ молекулъ въ твердомъ тѣлѣ и пользуясь ея данными можемъ смѣло, спокойно, свободно прилагать вычисленіе и разсчетъ къ міру молекулъ. Въ этомъ отношеніи теорія кристаллическихъ строеній является наиболѣе обработанной частью молекулярной физики; къ ней приближается только кинетическая теорія газовъ, но въ основѣ послѣдней лежатъ болѣе спорныя положенія. Между тѣмъ теорія строенія кристалловъ разработана на несомнѣнныхъ устояхъ:—общихъ законахъ симметріи, векторіальности свойствъ твердаго тѣла, его однородности, неуничтожаемости матеріи.

Эта теорія даетъ намъ совершенно точныя и несомнѣнныя научныя представленія о 32 твердыхъ состояніяхъ химическихъ соединеній. Съ жидкостью и газомъ надо сравнивать теперь не твердое тѣло вообще, а одно изъ 32 для него возможныхъ состояній. Въ настоящее время — особенно послѣ работъ Зонке и Федорова — появились попытки различить на основаніи группировки атомовъ еще болѣе мелкія дробленія твердой матеріи, но эти попытки пока не привели къ конкретнымъ результатамъ. Эта область теоретической кристаллографіи ставитъ передъ изслѣдователемъ двѣ неразрѣшенныхъ, едва затронутыхъ задачи: 1) провѣрку ея детальныхъ выводовъ опытомъ и наблюденіемъ — коренной путь натуралиста, 2) философскую ея критику, въ связи съ ученіемъ о познаніи.

30. **Развитіе измѣрительныхъ приборовъ и методовъ вычисленій.** Почти одновременно съ побѣдой теоріи строенія кристалловъ во всѣхъ областяхъ науки шла за послѣдніе 70—80 лѣтъ необыкновенно энергичная и усиленная дѣятельность. Одной изъ важнѣйшихъ задачъ ея явилось усовершенствованіе и улучшеніе методовъ научной работы. Два основныхъ прибора кристаллографіи въ это

время достигли рѣдкаго совершенства—гоніометръ и поляризаціонный микроскопъ. На ряду съ ними стали другія приспособленія для изслѣдованія главнымъ образомъ свѣтовыхъ свойствъ кристалловъ. *Гоніометръ*, изобрѣтенный въ 1780-хъ гг. Каранжо, очень скоро смѣнился приборомъ болѣе точнымъ, основаннымъ на законахъ отраженія свѣта, который былъ построенъ Волластономъ въ 1809 г. Приборъ этотъ распространился чрезвычайно быстро; повидимому независимо отъ Волластона таже идея почти въ то же время была приведена въ исполненіе Малюсомъ и Брюстеромъ. Въ 1820-хъ гг. Митчерлихъ ввелъ въ него коллиматоры, въ 1839 Бабинэ—горизонтальный кругъ [1]) и къ серединѣ 1880-хъ годовъ гоніометръ сталъ въ высшей степени простымъ, точнымъ и изящнымъ приборомъ. Это одинъ изъ совершеннѣйшихъ аппаратовъ научной техники. Въ 1890-хъ гг. началась разработка новаго типа гоніометра [2]), которому, очевидно, принадлежитъ будущее, т. к. онъ даетъ болѣе удобное обозначеніе простыхъ формъ; однако этотъ такъ называемый *теодолитный гоніометръ*, почти одновременно изобрѣтенный Федоровымъ, Чапскимъ и Гольдшмидтомъ далеко еще не достигъ своей окончательной формы.

31. Еще быстрѣе шло развитіе *оптическихъ методовъ* изслѣдованія. Основы *поляризаціоннаго аппарата* даны въ 1811 году Малюсомъ (1775—1812); вскорѣ Брюстеръ и Араго придали ему довольно удобную форму, при чемъ въ началѣ, съ 1813 г., употреблялись введенные Араго и Зеебекомъ турмалиновые поляризаторы. Въ 1828 г. Николь изобрѣлъ названную его именемъ призму изъ исландскаго шпата, а вскорѣ въ 1830-хъ гг. Нерренбергъ построилъ поляризаціонный аппаратъ, сохранившійся въ общихъ чертахъ неизмѣннымъ до настоящаго времени. Тогда же созданъ былъ и приборъ для измѣренія угловъ оптическихъ осей—одно изъ видоизмѣненій гоніометра. Основными приборами научной работы въ этой области явились однако микроскопъ и рефрактометръ. Въ теченіе XIX столѣтія *поляризаціонный микроскопъ* быстро достигъ блестящаго развитія, такъ какъ удалось вполнѣ примѣнить къ нему всѣ усовершенствованія, выработанныя біологами. Введеніе поляризованнаго

---

[1]) Еще раньше аналогичнымъ пріемомъ пользовался Малюсъ.

[2]) Попытки такого гоніометра много раньше дѣлались Миллеромъ.

свѣта съ опредѣленной измѣримой траэкторіей колебаній, работа въ однородномъ свѣтѣ опредѣленной длины волны позволила придать этому прибору большую точность и сдѣлала изъ него научный измѣрительный аппаратъ. Превращеніе микроскопа въ измѣрительный приборъ представляетъ любопытную страницу въ исторіи человѣческаго мышленія. Въ началѣ XIX столѣтія улучшеніе поляризаціоннаго микроскопа достигнуто гл. обр. трудами французскихъ оптиковъ и ученыхъ, оптическими техниками Солейля, Нашэ и др.; здѣсь впервые появилась основная часть прибора—вращающійся столикъ. Позже, къ концу столѣтія, центръ улучшеній въ этой области перешелъ въ Германію гл. обр. въ оптическіе институты Фуэсса въ Берлинѣ и Цейсса въ Іенѣ. Работа надъ его улучшеніемъ еще не закончена, но задача ея ясна: поляризаціонный микроскопъ долженъ, подобно телескопу, сдѣлаться измѣрительнымъ приборомъ, позволяющимъ точно вычислять количественно всѣ свѣтовые векторы и измѣрять ихъ расположеніе въ пространствѣ въ связи съ молекулярной структурой твердаго тѣла. Другимъ основнымъ приборомъ кристаллографа служитъ *рефрактометръ*, измѣряющій преломленіе свѣта. Долгое время для этого употреблялся гоніометръ, но съ 1878 г. Кольраушъ, воспользовавшись старой идеей Волластона (1802), построилъ новый приборъ — отраженный рефлектометръ, который скоро, почти сразу, достигъ значительнаго совершенства и развитія. Такимъ образомъ къ нашему времени основные приборы кристаллооптики были выработаны, они пріобрѣли форму удобную для быстрой и точной текущей работы. Наконецъ во второй половинѣ XIX вѣка выяснилась необходимость въ новомъ приспособленіи, которое въ оптикѣ кристалловъ играетъ ту же роль, какую въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ химіи и бактеріологіи исполняетъ термостатъ. Кристаллы начали въ это время изучать въ пространствахъ съ опредѣленной формой лучистой энергіи, т.-е. *въ свѣтѣ одной длины волны*. Въ удобной для работы формѣ задача рѣшена пока лишь въ грубыхъ чертахъ, но ясно, что легкое полученіе такихъ пространствъ съ точно измѣримой лучистой энергіей является теперь главной задачей измѣрительной кристаллооптики. На ея достиженіе направлены усилія и оно не представляетъ непреодолимыхъ трудностей.

32. На ряду съ улучшеніемъ основныхъ измѣрительныхъ приборовъ шло быстрое развитіе *методовъ вычисленія и проэкціи*; этихъ неизбѣжныхъ пріемовъ всякой научной работы въ кристаллографіи. Первые довольно грубые вычислительные способы были даны уже въ работахъ Гаюи. Въ 1829 г. Нейманнъ сдѣлалъ крупнѣйшій шагъ въ этой области, введя понятіе полюсовъ плоскостей, т.-е. замѣнивъ кристаллическую грань точкой и открывъ т. обр. путь для приложенія къ кристалламъ пріемовъ вычисленій, выработанныхъ вѣковымъ опытомъ астрономовъ. Эта идея была высказана уже 20 лѣтъ до него Бернгарди, но осталась безъ разработки и примѣненія. Въ 1830-хъ гг. Миллеръ, воспользовавшись идеями Нейманна, ввелъ въ кристаллографію методы аналитической геометріи и сферической проэкціи. Но эти теперь наиболѣе употребительные пріемы работы проникали въ науку медленно; они окончательно вошли въ жизнь черезъ 70 лѣтъ послѣ обобщенія Нейманна, въ 1890-хъ годахъ. Развитіе формальной кристаллографіи послѣ Вейсса вызвало огромную вычислительную работу и въ концѣ концовъ привело къ значительной разработкѣ графическихъ и математическихъ пріемовъ. Въ этомъ отношеніи должны быть отмѣчены работы Купффера, Квенштедта, Науманна, Леви, Ланга. Мало-по-малу однако всѣ изслѣдователи перешли къ принципамъ Нейманна и пріемамъ Миллера, еще болѣе упростивъ и улучшивъ ихъ. Казалось эта область достигла окончательной формы своего развитія. Однако благодаря введенію теоріи строенія за послѣдніе 20 лѣтъ снова замѣчается въ ней усиленная дѣятельность. Благодаря измѣненію характера задачъ утомительныя вычисленія могутъ быть съ успѣхомъ замѣнены графическими пріемами (работы Е. С. Федорова, Пенфильда и др.). Въ общемъ, очевидно, здѣсь возможны лишь усовершенствованія, сокращающія время, которое тратится на технику вычисленій. Это тотъ же историческій процессъ, который со второй половины XIX столѣтія наблюдается всюду въ вычислительныхъ научныхъ дисциплинахъ.

33. Современное развитіе и ближайшія задачи кристаллографіи. 1830—1840 года въ научной мысли въ кристаллографіи являются эпохой перелома. Хотя въ это время основные принципы не проникли вполнѣ въ научную среду и законы симметріи были сознаны немногими изслѣдователями, но отдѣльные ученые достигли предѣловъ обобщеній, которыя являются наиболѣе широкими и теперь въ этой

области. Очевидно отдѣльныя лица должны были стремиться идти дальше. И дѣйствительно съ этого времени начинается усиленное изученіе явленій, которыя какъ тогда, такъ и теперь не поддаются объясненіямъ, основаннымъ исключительно на законахъ симметріи. Въ эту область направляется работа современной кристаллографіи и въ широкомъ развитіи этихъ явленій лежитъ будущее нашей науки. Изслѣдованія идутъ въ двухъ направленіяхъ, 1) въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ физической кристаллографіи и 2) въ химіи кристалловъ. Но помимо этой болѣе или менѣе сознательной работы, для рѣшенія всѣхъ вопросовъ и для проникновенія въ неизвѣданную безконечную область природы не слѣдуетъ забывать испробованную вѣками и основную въ естествознаніи описательную работу, должно осуществлять стремленіе охватить своимъ сознаніемъ все, вокругъ происходящее. Это центральный нервъ всей нашей работы въ наукѣ, залогъ всѣхъ ея успѣховъ въ будущемъ. Задачей кристаллографіи является изслѣдованіе всѣхъ безъ исключенія твердыхъ соединеній— составленіе полнаго *кристаллографическаго каталога* вещества со всѣми данными, какія могутъ быть выражены числами: съ элементами многогранниковъ, съ индексами простыхъ формъ, съ постоянными эллипсоидовъ разныхъ свойствъ и т. д. Это колоссальная работа будущаго. Она можетъ быть совершена по частямъ только коллективной работой ученыхъ и институтовъ всего міра, подобно тому какъ достигли своихъ результатовъ астрономы. Это задача XX вѣка. Но несомнѣнно, уже во второй половинѣ XIX столѣтія гл. обр. съ 1880 годовъ—подъ вліяніемъ минералогическихъ институтовъ и журналовъ, связанныхъ съ нѣмецкими университетами—эта работа все болѣе и болѣе координируется и прочное начало такого каталога твердаго вещества положено (работы Раммельсберга, Дюфэ, Грота и др.). При систематическомъ его составленіи природа откроетъ намъ многое, что не рисуется самой пылкой научной фантазіи.

34. Одновременно съ этой чисто наблюдательной работой шло расширеніе кристаллографіи опытнымъ путемъ. Наиболѣе важно изученій явленій, которыя не поддаются цѣликомъ ученію о симметріи. Это подходы къ дальнѣйшему болѣе крупному научному синтезу. Въ физической кристаллографіи такое изслѣдованіе шло въ двухъ областяхъ: 1) въ явленіяхъ, связанныхъ съ молекулярными передвиженіями кристалла и 2) въ свойствахъ твердаго вещества,

которыя основаны на рѣзкомъ взаимодѣйствіи между матеріей и эѳиромъ. Эти послѣднія явленія (піезоэлектричество, плеохроизмъ, свѣченіе кристалловъ и т. д.) до сихъ поръ не вышли изъ области эмпирическихъ фактовъ и грубыхъ обобщеній; въ этой области больше гипотезъ, чѣмъ строгихъ научныхъ обобщеній. Но въ другихъ явленіяхъ мы видимъ ясныя законности и хотя не имѣемъ окончательныхъ теорій, но вполнѣ сознаемъ направленіе и ходъ научной мысли въ ближайшемъ будущемъ. Среди этихъ явленій на первомъ мѣстѣ должны быть поставлены т. наз. *явленія кристаллизаціи.* Первые опыты надъ кристаллизаціей начались еще въ XVII столѣтіи; въ кругу лицъ группировавшихся въ XVIII вѣкѣ около де-Ромэ-Делиля техника этихъ опытовъ была поставлена на значительную высоту. Въ концѣ того же столѣтія началъ свои изслѣдованія великій неудачникъ Николай Лебланъ. Онъ первый далъ общіе способы полученія кристаллическихъ многогранниковъ, выяснилъ строгую закономѣрность процесса кристаллизаціи и поставилъ огромное количество разнообразнѣйшихъ опытовъ. Врачъ по образованію, приближенный герцога Орлеанскаго, Лебланъ незадолго до 1789 г. изобрѣлъ свой способъ полученія соды, произведшій, въ концѣ концовъ, своего рода революцію въ техникѣ. Но его способомъ воспользовались другіе. Всѣ его начинанія и всѣ его средства погибли въ года французской революціи: доведенный до полной нищеты Лебланъ не находилъ ни денегъ, ни досуга для своихъ работъ. Послѣ многолѣтнихъ тщетныхъ попытокъ кончить работу, въ 1802 году Лебланъ издалъ на частныя средства (Молара) подробный планъ предположенныхъ изслѣдованій, выражая полную увѣренность въ будущемъ значеніи этихъ своихъ едва начатыхъ опытовъ. Черезъ нѣсколько лѣтъ онъ въ отчаяніи глубокимъ старикомъ окончилъ жизнь самоубійствомъ (1806). Въ своемъ недоконченномъ наброскѣ, въ крайне рѣдкой нынѣ брошюрѣ, «De la cristallotechnie», онъ далъ основныя до сихъ поръ вѣрныя наблюденія надъ кристаллизаціей и установилъ вліяніе внѣшнихъ условій на ростъ кристаллическихъ полиэдровъ. Черезъ нѣсколько лѣтъ въ томъ же направленіи и почти по его плану начались работы талантливаго французскаго ученаго Бедана, который точно подтвердилъ и развилъ эмпирическіе законы кристаллизаціи. Многочисленныя болѣе новыя опытныя изслѣдованія прибавили лишь частности. Однако расширеніе нашихъ знаній было здѣсь

достигнуто путемъ наблюденія. Уже Гаюи и Вейссъ указывали на чрезвычайную близость веществъ различныхъ системъ между собой. Гаюи даже ввелъ понятіе о *предѣльныхъ формахъ*, находящихся на границѣ двухъ системъ. Въ 1820 — 1830-хъ годахъ Брейтгаупть, исходя изъ близости всѣхъ системъ къ правильной, пытался построить своеобразную прогрессіонную теорію кристаллическихъ тѣлъ. Эти первыя замѣчанія мало обратили на себя вниманіе; лишь впослѣдствіи послѣ сейчасъ же забытыхъ попытокъ Брука и Митчеля, независимо отъ нихъ Малляръ блестящимъ эмпирическимъ анализомъ указалъ въ 1884 г., что вещества всѣхъ системъ подъ вліяніемъ какихъ-то причинъ болѣе глубокихъ, чѣмъ симметрія, даютъ распредѣленіе молекулъ близкое къ структурѣ болѣе симметричныхъ системъ, и что всѣ тѣла по молекулярному строенію близки къ системѣ правильной. Всѣ эти явленія—загадочныя законности при кристаллизаціи и чрезвычайное приближеніе всѣхъ веществъ къ сѣткѣ правильной системы—должны получить объясненіе отъ одной общей причины. Она найдена въ основныхъ принципахъ ученія объ энергіи и объ условіяхъ равновѣсія молекулярныхъ системъ. Первые зародыши воззрѣній этого рода для твердаго вещества встрѣчаемъ мы еще въ концѣ XVIII столѣтія въ работахъ до сихъ поръ неоцѣненнаго Куломба. Въ срединѣ XIX вѣка эти идеи для кристаллизаціи льда зарождаются у двухъ оригинальныхъ и самостоятельныхъ физиковъ, стоявшихъ внѣ господствующихъ школъ, у Д. Томсона и Фарадэя. Наконецъ въ Коннектикутѣ въ замѣчательныхъ, только нынѣ оцѣненныхъ работахъ, въ 1876 г. В. Джиббсъ даетъ первую полную теорію кристаллизаціи, основанную на законахъ энергіи. Въ 1885 г. независимо отъ Джиббса аналогичныя идеи развиваетъ Кюри. Эти идеи Джиббса и Кюри несомнѣнно дали вѣрное направленіе научной мысли; въ ихъ развитіи заключается будущее нашей науки. Онѣ намѣчаютъ обобщеніе болѣе широкое и глубокое, чѣмъ ученіе о симметріи.

35. Другая область явленій кристаллизаціи—т. наз. *двойниковые сростки*—обратила на себя вниманіе также въ концѣ XVIII столѣтія. Законами двойниковыхъ сростаній занялись кристаллографы со временъ де Ромэ-Делиля. Уже Вейссъ указывалъ, что съ помощью двойниковъ кристаллы низшей симметріи даютъ поліэдры, приближающіеся къ высшимъ. Послѣ Вейсса на разборъ двойниковыхъ

сростаній было потрачено много труда и много остроумія. Но только послѣ 1876 г., послѣ работъ Э. Малляра (1838 — 1894), указавшаго на значеніе этихъ явленій въ природѣ, и на ихъ распространенность, кристаллографы впервые поняли важность этого типа кристаллизаціи. Изучивъ многочисленныя оптическія аномаліи, развивъ гипотезу объ элементахъ псевдо-симметріи, Малляръ впервые объяснилъ и вычислилъ сложные многогранники высшей симметріи, полученные сростаніемъ мельчайшихъ поліэдровъ низшей. Развитіе этого отдѣла, подобно другимъ явленіямъ роста, заключается въ приложеніи къ нему принциповъ энергетики и ученій о равновѣсіи механическихъ системъ.

36. Еще одинъ отдѣлъ кристаллофизики достигъ нѣкотораго развитія въ XIX столѣтіи. Это т. наз. *явленія вытравленія*,—область изслѣдованій, едва затронутыхъ опытомъ и наблюденіемъ. Они указываютъ намъ на правильность, какая наблюдается въ ходѣ химическихъ процессовъ, испаренія, плавленія, растворенія, диссоціаціи и т. под. по разнымъ направленіямъ въ кристаллическомъ тѣлѣ. Эта правильность подчиняется законамъ симметріи, но ими не объясняется. Явленія этого рода были впервые замѣчены въ кристаллахъ въ первые года XIX столѣтія Брюстеромъ и позже Даніеллемъ (1817). Однако они не обратили на себя вниманія и были забыты. Въ 1855 г. ихъ изслѣдовалъ Лейдольтъ, но только съ конца 1860-хъ годовъ послѣ работъ Баумгауэра эти явленія получили значеніе въ кристаллографіи. До сихъ поръ онѣ изучаются лишь съ внѣшней стороны и служатъ самымъ точнымъ и важнымъ методомъ для опредѣленія симметріи строенія. Всѣ попытки проникнуть въ нихъ глубже были неудачны и очевидно рѣшеніе вопроса можетъ быть достигнуто лишь на почвѣ новыхъ воззрѣній энергетики и физической химіи.

37. Наконецъ, надо отмѣтить еще одну область явленій, еще болѣе трудную и запутанную. Это т. наз. *явленія скольженія*, область закономѣрныхъ молекулярныхъ передвиженій безъ нарушенія однородности вещества, происходящихъ путемъ давленія, нагрѣванія и т. п. Уже кристаллографы XVII столѣтія наблюдали ихъ въ исландскомъ шпатѣ. Въ началѣ XIX вѣка Брюстеръ произвелъ рядъ наблюденій надъ этими явленіями, въ 1860-хъ годахъ опыты Рейша обратили на нихъ общее вниманіе. Но только послѣ того какъ въ 1879 г. Баумгауэръ сдѣлалъ удивительный опытъ молекулярнаго передвиженія

кальцита подъ вліяніемъ слабаго давленія и опредѣлилъ характеръ этихъ явленій, какъ сдвига молекулярныхъ слоевъ или скольженія, передъ нами ясно стало глубокое теоретическое значеніе этихъ явленій. Дальнѣйшія изслѣдованія показали, что и здѣсь симметрія лишь въ общихъ чертахъ опредѣляетъ наблюдаемыя правильности и что за предѣлами ея начинается область закономостей, регулируемыхъ другими принципами. И здѣсь будущее заключается въ приложеніи энергетики и ученій о равновѣсіи механическихъ системъ. Изученіе этихъ явленій особенно важно, такъ какъ путемъ его можно надѣяться подойти къ механической теоріи твердаго вещества.

38. Хотя мы еще далеки отъ крупныхъ обобщеній, мы всюду въ этихъ явленіяхъ чувствуемъ приближеніе новыхъ законовъ, передъ нами ясно раскрываются достижимые широкіе горизонты будущаго. Въ этомъ отношеніи кристаллографія не стоитъ одиноко. Во второй половинѣ XIX вѣка, въ ней своеобразно переживался тотъ же процессъ развитія, который проходилъ и въ другихъ отдѣлахъ такъ называемой физики частичныхъ силъ и привелъ къ созданію физической химіи. Въ ней поднялись тѣже вопросы, подошли тѣже рѣшенія. Проникновеніе въ нее ученія объ энергіи, этого основнаго credo современнаго натуралиста, и широкое приложеніе ученій о равновѣсіи—этого новаго отпрыска вѣкового и нерушимаго чувства міровой гармоніи—являются и въ кристаллографіи, какъ и въ физической химіи основными тонами научнаго развитія ближайшаго времени. Это и понятно. Не придавая многимъ натурфилософскимъ воззрѣніямъ новѣйшей энергетики того положительнаго значенія, какое признаютъ за ней Гельмъ или Оствальдъ, нельзя не считаться съ той совершенно новой обработкой, какую подъ вліяніемъ этихъ идей на нашихъ глазахъ получили разнообразнѣйшія свойства жидкостей и газовъ, свойства вполнѣ аналогичныя многимъ изъ тѣхъ, которыя служатъ предметомъ изученія кристаллографіи. Переработка кристаллографіи подъ вліяніемъ этихъ идей въ связи съ измѣненіемъ, вносимымъ въ самыя эти идеи ученіемъ о симметріи, является неизбѣжной и важной работой ближайшаго будущаго. Особенно сильно должны чувствоваться эти вѣянія въ *химической кристаллографіи* и дѣйствительно въ ней теперь начинаютъ выясняться широкіе и далекіе горизонты. Въ 1840—1850-хъ гг. Пастеръ и Ладрей независимо другъ отъ друга указали на близость формы

нѣкоторыхъ полиморфныхъ веществъ и на принадлежность ихъ многогранниковъ къ предѣльнымъ (въ смыслѣ Гаюи) формамъ. Они нашли, что при полиморфныхъ измѣненіяхъ нѣкоторые пояса плоскостей не смѣщаются—это тотъ же процессъ, который является характернымъ признакомъ скольженія. Съ 1870-хъ гг., послѣ работъ Леманна и др., оказалось, что всѣ процессы перехода полиморфныхъ тѣлъ одно въ другое аналогичны взаимнымъ переходамъ жидкихъ или газообразныхъ веществъ и что къ нимъ приложимы всѣ законности, извѣстныя для этихъ явленій въ физической химіи. Особенно важно распространеніе на кристаллы ученія о фазахъ и примѣненіе калориметра. Въ этой области открывается передъ нами наука будущаго—термокристаллографія.

39. Развитіе новой химіи оказало еще болѣе значительное вліяніе на такъ наз. изоморфизмъ. Передъ научной критикой поблекли старыя теоріи. Изъ случайнаго признака изоморфизма изоморфныя смѣси пріобрѣли первостепенное значеніе въ кристаллографіи, какъ прямые аналоги растворамъ въ области твердаго тѣла. Эта старая идея Бертоллэ и Франкенгейма была возстановлена Вантъ-Гоффомъ въ 1890 г. Изученіе физическихъ свойствъ этихъ смѣсей впервые привело въ 1878 г. Дюфэ къ мнѣнію, что нѣкоторыя ихъ свойства аддитивны и этимъ путемъ здѣсь открылась возможность предвидѣнія и вычисленія. Работа только что начинается.

Въ области изоморфизма,—т.-е. въ вопросѣ о вліяніи химическаго состава на кристаллическое строеніе мы еще далеки отъ прочныхъ обобщеній. Пока выясняется только, что иногда кристаллическая структура мѣняется пропорціонально атомному вѣсу элементовъ или ихъ группъ. Законъ этого измѣненія однако остается скрытъ. Это самая трудная и самая интересная область кристаллографіи, такъ какъ съ ея разрѣшеніемъ связана разгадка строеній твердыхъ соединеній. Вопросы дня здѣсь тѣсно подходятъ къ намъ и трудно изъ за нихъ различить будущее направленіе научной работы. Но и изъ этого краткаго историческаго очерка развитія идей въ кристаллографіи—ясно должно вытекать глубокое значеніе изучаемыхъ въ ней вопросовъ для нашего научнаго міровоззрѣнія. Философское значеніе этой отрасли физики выступаетъ еще рѣзче и опредѣленнѣе при систематическомъ изложеніи ея конкретныхъ явленій.

ГЛАВА II.

Предметъ кристаллографіи. Понятіе о кристаллѣ.

40. Отношеніе кристаллографіи къ физикѣ и минералогіи. Историческое развитіе кристаллографіи ясно и опредѣленно вывело ее въ концѣ XIX столѣтія на широкую дорогу. Трудами поколѣній ученыхъ—съ XVII по XIX вѣкъ (§§ 4 сл.) вполнѣ выяснилась задача кристаллографіи и ясно опредѣлилось ея мѣсто въ ряду другихъ научныхъ дисциплинъ. *Кристаллографія имѣетъ своей задачей изслѣдованіе свойствъ и законовъ, присущихъ твердому веществу, выясненіе его строенія.* Она принадлежитъ къ группѣ физическихъ наукъ, должна была бы входить въ составъ физики, образуетъ одинъ изъ отдѣловъ такъ-называемой «физики частичныхъ силъ». Однако, исторически, какъ мы видѣли, она развивалась отдѣльно отъ физики и стояла съ ней въ не бо̀льшей связи, чѣмъ съ химіей; гораздо тѣснѣе примыкала она къ наукѣ совершенно иного порядка, къ *минералогіи.* До сихъ поръ въ огромномъ большинствѣ университетскихъ каѳедръ всего міра въ преподаваніи кристаллографіи эта связь ея съ минералогіей не порвана и до послѣдняго времени ея отдѣлы, близкіе къ минералогіи, были разработаны значительно полнѣе, чѣмъ тѣ ея части, которыя мало имѣли значенія для минералога. Но съ послѣднихъ десятилѣтій прошлаго вѣка эта связь нарушается чрезвычайно быстро и неуклонно. Съ каждымъ годомъ въ кристаллографіи выступаютъ все яснѣе вопросы, не имѣющіе ничего общаго съ минералогіей, создаются цѣлые ея отдѣлы, которые чужды изслѣдователямъ, спеціально посвящающимъ себя изученію химическихъ свойствъ нашей планеты. Она открываетъ передъ нами почти безконечные горизонты для пониманія строенія матеріи, широко пользуется дедукціей. Ученые, работающіе въ области минералогіи—этой химіи земной коры—далеки отъ такихъ задачъ и методовъ. Нельзя быть

минералогомъ, не овладѣвъ основными пріемами кристаллографическихъ работъ, не переработавъ принципы кристаллографіи, ибо минералогъ имѣетъ дѣло съ твердыми кристаллическими продуктами земныхъ химическихъ реакцій, точно такъ же, какъ нельзя быть минералогомъ, не владѣя химическимъ анализомъ и не углубившись въ основныя проблемы химіи. Но отнюдь нельзя этого сказать обратно — про химію или кристаллографію. Можно быть кристаллографомъ, стоя совершенно въ сторонѣ отъ научнаго движенія въ минералогіи и не владѣя совсѣмъ тѣми своеобразными наблюдательными методами и пріемами, какіе развились въ этой наукѣ въ тѣсной зависимости отъ изучаемыхъ въ ней вопросовъ. Вѣковая связь кристаллографіи съ минералогіей порвана; она все больше нарушается и быстро отходитъ въ область историческихъ пережитковъ научной мысли.

41. Однако связь кристаллографіи съ физикой далеко не такъ тѣсна, какъ можно было бы ожидать изъ законченнаго процесса ея отдѣленія отъ минералогіи. Причиной этому служитъ своеобразіе методовъ работы въ кристаллографіи, характеръ наблюдаемыхъ въ ней закономостей.

Долгое время область явленій и фактовъ, открываемыхъ кристаллографіей, стояла въ рѣзкомъ противорѣчіи, какъ бы въ сторонѣ отъ установившихся вѣковымъ опытомъ и наблюденіемъ представленій физики. Идеаломъ физики являлось и является сведеніе всѣхъ изучаемыхъ въ ней процессовъ къ движенію, выясненіе механическихъ законовъ и характера этихъ движеній. Въ этомъ стремленіи заключалась живая и основная нота въ развитіи физическихъ дисциплинъ. Среда, въ которой происходитъ движеніе, изучаемое въ физикѣ, относится къ этому движенію опредѣленнымъ образомъ, оказываетъ ему извѣстное сопротивленіе—но не вліяетъ ни на его характеръ, ни на направленіе. Она безструктурна и инертна. Движеніе въ средѣ мѣняетъ направленіе или измѣняетъ свой характеръ въ зависимости отъ внѣшней «силы», а не отъ свойствъ той среды, въ которой оно распространяется. Такъ, болѣе или менѣе точно сведены къ движенію многочисленныя явленія звука, тепла, электричества, магнетизма. Иногда мы имѣемъ дѣло съ движеніями матеріальныхъ частицъ, иногда съ колебаніями эѳира,—въ иныхъ случаяхъ съ одновременными движеніями обѣихъ срединъ. Но всегда и вездѣ явленіе не измѣняется отъ

структуры пространства; оно имѣетъ одинаковый характеръ, встрѣчаетъ одинаковое воздѣйствіе по всѣмъ направленіямъ въ любой средѣ. Такъ, планета будетъ двигаться въ разныхъ точкахъ пространства по однимъ и тѣмъ же эллипсисамъ, съ одной и той же скоростію, разъ не мѣняется ея масса или масса солнца, находящагося въ фокусѣ эллипсиса. Ея движеніе измѣнится только въ зависимости отъ приближенія или удаленія къ ней другихъ постороннихъ массъ. Въ воздухѣ или въ водѣ,—звуковыя, свѣтовыя и т. п. волны будутъ распространяться съ одинаковой скоростію по всѣмъ направленіямъ: эта скорость зависитъ только отъ химическаго состава и физическаго состоянія данной среды. Если бы характеръ пространства, въ которомъ распространяются небесныя тѣла былъ различенъ по разнымъ направленіямъ—законы всемірнаго тяготѣнія, какъ они выражены Ньютономъ, оказались бы невѣрными. Если бы лучистая энергія распространялась въ облекающей насъ воздушной или жидкой средѣ различнымъ образомъ по разнымъ направленіямъ, то наши представленія о самыхъ обычныхъ и основныхъ для насъ предметахъ въ окружающемъ насъ мірѣ измѣнились бы кореннымъ образомъ. Такой характеръ физическихъ явленій позволяетъ сводить ихъ въ точной и удобной формѣ къ движеніямъ матеріальныхъ или эѳирныхъ частицъ и этимъ путемъ выражать такія явленія въ удобныхъ для работы математическихъ (аналитическихъ) выраженіяхъ.

42. Благодаря этому въ научной мысли изслѣдователя-физика мало-по-малу, утвердилось убѣжденіе, что идеаломъ научнаго объясненія является сведеніе даннаго явленія къ движенію, выраженіе его въ формулахъ и знакахъ механики. Стали думать, что научное объясненіе достигнуто, какъ только явленіе выражено въ формулахъ, связанныхъ съ движеніемъ въ матеріальной или эѳирной средѣ. Скоро создались блестящія научныя теоріи, позволяющія примѣнять въ естествознаніи дедуктивный методъ работы. Этимъ путемъ оказалось возможнымъ предвидѣть всѣ проявленія даннаго свойства, вполнѣ провѣрять количественнымъ опытомъ математическіе выводы теорій. Полное совпаденіе такихъ научныхъ теорій съ наблюдаемыми фактами служитъ блестящимъ подтвержденіемъ правильности приведшаго къ нимъ основного воззрѣнія; изъ него вытекаетъ для нашего ума обязательность принятія лежащихъ въ основѣ теорій представленій.

43. Однако, дальнѣйшее развитіе физики — главнымъ образомъ въ XIX столѣтіи, указало, что иногда вполнѣ возможно достигать тѣхъ же результатовъ другимъ путемъ, минуя всякія представленія о лежащихъ въ основѣ явленія движеніяхъ матеріальныхъ или эѳирныхъ частей. Въ области физики встрѣтились явленія, которыя происходятъ въ средѣ, обладающей структурой, отдѣльныя направленія которой сами по себѣ различнымъ образомъ измѣняютъ наблюдаемыя въ тѣлѣ физическія свойства. Сама среда является какъ бы дѣйствующей причиной (силой) происходящихъ въ явленіи измѣненій. Въ такихъ физическихъ наблюденіяхъ нѣтъ возможности просто и математически удобно выразить фактъ въ аналитическихъ формулахъ механики. Полнаго и точнаго научнаго знанія можно въ нихъ достигнуть только путемъ освобожденія мысли отъ какого бы то ни было представленія о лежащихъ въ основѣ явленія движеніяхъ. Развитіе относящихся къ такимъ явленіямъ идей Фарадэя и Максуэлла привело къ своеобразнымъ *геометрическимъ представленіямъ* въ ученіи объ электричествѣ и магнетизмѣ. Дальнѣйшее развитіе тѣхъ же пріемовъ—главнымъ образомъ послѣ работъ У. Джиббса—открыло аналогичное примѣненіе геометрическихъ представленій и въ многочисленныхъ, разнообразныхъ явленіяхъ физической химіи и термодинамики. Во всѣхъ этихъ случаяхъ достигается точное, полное, научное знаніе факта, полная возможность вычислить и предвидѣть количественно всѣ разнообразныя слѣдствія изъ геометрически выраженнаго сложнаго явленія, но въ нихъ вполнѣ отсутствуетъ представленіе о движеніи. Въ концѣ концовъ, знаніе этого рода ничѣмъ не отличается по своимъ слѣдствіямъ и по своему значенію отъ тѣхъ точно установленныхъ теорій, которыя сводятъ явленіе на движеніе. Дѣйствительно ли мы имѣемъ здѣсь дѣло съ проявленіемъ новыхъ болѣе сложныхъ процессовъ, не связанныхъ съ движеніемъ или такое геометрическое выраженіе правильности зависитъ только отъ метода работы и отъ трудности для нашего ума выразить въ удобной для работы формѣ сложныя движенія, свойственныя этимъ явленіямъ матеріи или эѳира—это вопросы, которые глубоко волнуютъ современныхъ натуралистовъ, но которые по существу выходятъ изъ области точнаго знанія. Ихъ разрѣшеніе должно принадлежать разнымъ отдѣламъ философіи и до сихъ поръ мы еще далеки отъ полнаго анализа

этихъ отдѣловъ знанія. Такія геометрическія представленія издавна употреблялись въ физикѣ, но вначалѣ считались только приближеніемъ къ созданію чисто механическихъ теорій. Они стали передъ натуралистами и философами во всей своей силѣ только въ послѣдней четверти XIX вѣка и въ ихъ ясномъ выраженіи заключается главнѣйшее значеніе развитія физики конца XIX столѣтія въ исторіи человѣческой мысли.

Для точнаго изслѣдователя природы теоріи этого рода, сводящія всѣ явленія на геометрическія представленія, на изученіе геометріи явленій (геометрическихъ поверхностей) или геометрической структуры среды имѣютъ значеніе *равное* съ теоретическими представленіями, которыя сводятъ все на движеніе точекъ или частицъ. Ибо и тѣ и другія теоріи даютъ одинаковымъ образомъ возможность предвидѣть и предвычислить всѣ слѣдствія изъ природныхъ явленій—достигнуть предѣла точнаго знанія природы. Къ нимъ цѣликомъ и вполнѣ приложимъ дедуктивный методъ разсужденія и они такъ же—какъ и движенія—могутъ быть легко написаны въ математическихъ формулахъ, сведены къ математически выраженнымъ законамъ. Кристаллографія издавна достигла такого точнаго выраженія наблюдаемыхъ явленій. Древнее представленіе о Природѣ-Геометрѣ здѣсь сразу съ необыкновенной яркостію бросалось въ глаза и вызвало развитіе и примѣненіе теорій, которыя совершенно не соотвѣтствовали историческому процессу, совершавшемуся въ другихъ отдѣлахъ физики. Благодаря этому, образовалась рѣзкая грань между кристаллографіей и физикой—грань, постепенно сглаживающаяся въ настоящее время, благодаря введенію новыхъ представленій въ физику и физическую химію.

44. Векторъ. Векторіальность законовъ въ кристаллографіи. Всѣ явленія, изучаемыя въ кристаллографіи имѣютъ своеобразный характеръ, благодаря тому, что онѣ зависятъ отъ *направленія*, въ которомъ изучается данное явленіе. Среда, въ которой идутъ явленія отличается особымъ строеніемъ и это строеніе выражается тѣмъ, что тѣло различно отзывается на какое-нибудь явленіе по разнымъ въ немъ направленіямъ. Благодаря этому, намъ необходимо изучать отдѣльныя направленія (eo ipso линіи) въ кристаллической средѣ и придавать этимъ направленіямъ различное значеніе. Поэтому, удобно выдѣлить и какъ нибудь обозначить направленія; въ дальнѣйшемъ

изложеніи я буду называть направленіе въ кристаллѣ *векторомъ кристалла.* Векторъ не есть простое геометрическое направленіе, въ кристаллѣ онъ обладаетъ особыми физическими свойствами, опредѣленнымъ образомъ количественно вліяетъ на изучаемое по немъ физическое явленіе. Всѣ законы физическихъ явленій въ кристаллографіи по разнымъ направленіямъ могутъ имѣть разную величину, т.-е. могутъ быть сведены къ опредѣленному расположенію векторовъ въ пространствѣ, обладаютъ, такъ сказать, *векторіальнымъ характеромъ.* Въ этой *векторіальности* законовъ мы имѣемъ наиболѣе характерную и важную черту изучаемыхъ въ кристаллографіи явленій. *Векторы* могутъ считаться *равными* и *идентичными,* когда они одинаковымъ образомъ вліяютъ на всѣ явленія, наблюдаемыя въ кристаллахъ; могутъ быть случаи, когда векторы являются равными и идентичными для одного или для нѣсколькихъ физическихъ явленій и оказываютъ различныя вліянія на другія. Въ изученіи распредѣленія въ пространствѣ векторовъ, равныхъ и идентичныхъ для всѣхъ свойствъ или только для нѣсколькихъ физическихъ явленій—состоитъ одна изъ главнѣйшихъ задачъ кристаллографіи, т. к. только этимъ путемъ мы получаемъ ясное представленіе о строеніи кристаллическихъ тѣлъ. Очевидно, такое изслѣдованіе даетъ намъ ясное понятіе о характерѣ физическихъ законовъ, наблюдаемыхъ въ кристаллографіи. Существованіе различныхъ векторовъ въ твердомъ тѣлѣ есть наиболѣе рѣзкій и важный признакъ, отличающій твердое тѣло отъ жидкостей или газовъ и ихъ нахожденіе и измѣреніе служитъ главной задачей, лежащей въ основѣ всѣхъ изслѣдованій кристаллографа. Это строеніе кристалловъ изъ векторовъ, чуждое нашимъ обычнымъ понятіямъ, очевидно, должно было вызвать чрезвычайно своеобразные пріемы для выраженія наблюдаемыхъ въ нихъ правильностей; оно должно было привести къ упрощенному символическому обозначенію ихъ явленій, создать особый языкъ кристаллографіи. Такія неизбѣжныя, новыя, неизвѣстныя въ другихъ отдѣлахъ физики символическія обозначенія сильно затруднили проникновеніе выводовъ кристаллографіи въ общее научное міровоззрѣніе.

45. Понятіе о кристаллѣ. Намъ необходимо прежде всего точно и ясно опредѣлить, какія твердыя тѣла мы называемъ кристаллами. Не всякое твердое тѣло есть кристаллъ. Мы видимъ твердое вещество всюду вокругъ, въ насъ самихъ. Но, очевидно, для точнаго

изученія его свойствъ — мы должны исходить въ нашемъ изслѣдованіи изъ наиболѣе чистыхъ, опредѣленныхъ по свойствамъ примѣровъ этого состоянія матеріи. Для того, чтобы намъ не мѣшали какія нибудь явленія, зависящія отъ различія химическаго состава— надо начать съ изученія химически чистыхъ тѣлъ. Зная свойства такихъ болѣе простыхъ твердыхъ веществъ, мы легко разберемся и въ сложныхъ веществахъ, составленныхъ изъ смѣси нѣсколькихъ твердыхъ химически чистыхъ тѣлъ. *Объектомъ изслѣдованія кристаллографіи и служитъ химически чистое твердое тѣло.* Но мы знаемъ, что химически чистыми могутъ быть какъ тѣла имѣющія опредѣленный составъ, такъ и вещества такого состава не имѣющія. Химически опредѣленное соединеніе — напр. H_2O — и растворъ напр. 5% растворъ $NaCl$ въ H_2O — являются химически чистыми тѣлами. И среди твердыхъ тѣлъ мы имѣемъ представителей обоихъ этихъ типовъ и другихъ имъ подобныхъ (§ 67 и сл.) и законы ихъ, какъ увидимъ—не вполнѣ одинаковы. Кристаллами могутъ быть, какъ химически опредѣленныя, такъ и неопредѣленныя соединенія.

46. Остановимся сперва на химически чистомъ, опредѣленномъ соединеніи. Возьмемъ кусокъ какого нибудь металла—напр. золота, серебра, желѣза. Иногда простымъ глазомъ, иногда подъ микроскопомъ мы можемъ отличить въ немъ отдѣльные участки, отличающіеся по блеску, контуру и т. под. отъ другихъ. Мы говоримъ, что металлъ имѣетъ *зернистое строеніе;* а отдѣльныя отличимыя нами части называемъ зернами. Иногда эти зерна не видны сразу, но могутъ быть сдѣланы видными послѣ обработки кислотами или щелочами, т. к. рядомъ лежащія части разныхъ зеренъ оказываютъ неодинаковое сопротивленіе разъѣданію. Тоже строеніе наблюдается и въ другихъ тѣлахъ, напр. въ мраморѣ—$CaCO_3$; здѣсь можно отличить отдѣльныя площадки, видны границы между зернами $CaCO_3$ даже простымъ глазомъ. Мы говоримъ въ такихъ случаяхъ, что изучаемое тѣло не вполнѣ физически однородно, т. к. физическими пріемами можно выдѣлить его отдѣльныя части. Очевидно, разъ составъ тѣла во всѣхъ точкахъ одинаковъ — видимая его неоднородность можетъ происходить только отъ того, что онъ состоитъ изъ отдѣльныхъ однородныхъ частей, зеренъ, которыя можно отличить другъ отъ друга, но внутри которыхъ нельзя тѣми же пріемами отличить отдѣльныя точки. И дѣйствительно, если выдѣлить отдѣль-

ное зерно мрамора или металла и изучать его тѣми же пріемами— оно представится цѣльнымъ и неразрывнымъ — *однороднымъ* тѣломъ. Какое бы твердое, химически чистое тѣло, мы ни взяли — всегда можно найти, что или 1) оно вполнѣ однородно, т.-е. въ немъ нельзя различить отдѣльныхъ участковъ съ помощію данныхъ физическихъ явленій или 2) оно распадается на отдѣльныя зерна, которыя однородны, т.-е. не могутъ быть разложены на отдѣльныя части никакими физическими пріемами. Форма и величина этихъ зеренъ чрезвычайно разнообразна — мы имѣемъ случаи, когда ихъ величина достигаетъ небольшихъ долей микроновъ, не видна подъ микроскопомъ, но когда ихъ существованіе можетъ быть доказано другимъ путемъ (напр. изслѣдованіемъ явленій упругости и т. д.). Съ другой стороны наблюдаются случаи, когда зерна достигаютъ огромной величины и занимаютъ объемы въ нѣсколько кубическихъ метровъ. Ихъ форма также необыкновенно разнообразна:—химически чистыя твердыя тѣла иногда распадаются на отдѣльныя нити, волокна (напр. куски асбеста и т. д.), иногда форма ихъ совершенно неправильна, иногда ограничена болѣе или менѣе плоскими гранями, которыя ясно видны при разломѣ куска твердаго тѣла (напр. металлы). Въ формѣ строющихъ твердое тѣло зеренъ наблюдается безконечное разнообразіе. Есть твердыя тѣла, въ которыхъ зерна имѣютъ одинаковую форму и размѣры; въ другихъ онѣ сильно колеблятся.

Во всякомъ случаѣ *зернистость строенія* есть наиболѣе характерный, рѣзкій признакъ твердаго тѣла, отличающій его отъ жидкости или газа. Эти *зерна*, на которыя распадается твердое тѣло при изученіи его подъ микроскопомъ (т.-е. по отношенію къ явленіямъ преломленія и отраженія свѣта) или какими нибудь другими пріемами физическаго изслѣдованія, называются *кристаллами*.

47. Такимъ образомъ *кристалломъ мы будемъ называть химически чистое, физически однородное твердое тѣло.* Каждое химически чистое твердое тѣло или само по себѣ образуетъ кристаллъ или состоитъ изъ отдѣльныхъ кристалловъ (зеренъ). Подъ именемъ *физически однороднаго тѣла* надо понимать такое строеніе твердаго тѣла, при которомъ нельзя никакими физическими пріемами отличить отдѣльныя части тѣла другъ отъ друга. Изучая свѣтовыя явленія (т.-е. наблюдая тѣло подъ микроскопомъ или простымъ глазомъ) нельзя видѣть *границъ* между участками однороднаго тѣла; опредѣляя упругость,

электрическія, магнитныя, свѣтовыя и т. п. явленія во всѣхъ точкахъ такого однороднаго тѣла, мы будемъ въ параллельныхъ векторахъ получать однѣ и тѣ же числовыя величины для даннаго свойства. Однимъ словомъ мы не можемъ никакими физическими пріемами раздѣлить однородное тѣло на отдѣльные участки, различить его части. Только примѣняя болѣе сильныя химическія воздѣйствія мы можемъ разложить такое тѣло на его составныя части, перевести его въ новыя тѣла.

48. Итакъ твердое вещество состоитъ изъ отдѣльныхъ зеренъ, элементарныхъ частей и эти элементы твердаго тѣла называются *кристаллами*. Къ вопросу о томъ, всѣ ли твердыя тѣла (химически чистыя) имѣютъ такое строеніе изъ кристалловъ, я вернусь ниже (§ 74).

Обратимъ теперь еще вниманіе на аналогію съ жидкостію. Мы знаемъ, что химически чистая жидкость во всей своей массѣ всегда однородна. При извѣстныхъ условіяхъ она распадается на мелкія капли, но эти капли, слившись, даютъ вполнѣ однородную массу жидкости, въ которой никакими физическими пріемами нельзя отличить отдѣльныя, выдѣлимыя части. Слѣдовательно, съ однородною жидкостію можно сравнивать не все твердое тѣло, а только отдѣльныя однородныя его части, т.-е. кристаллы. Сливаясь вмѣстѣ въ твердомъ тѣлѣ, вообще говоря, эти части (зерна-кристаллы) отличимы другъ отъ друга, и не даютъ, подобно каплямъ жидкости однороднаго твердаго тѣла. Причиной этого является векторіальность свойствъ твердаго тѣла и равенство и идентичность (§ 44) всѣхъ векторовъ въ тѣлѣ жидкомъ. Вслѣдствіе такого равенства граница капель жидкости при ихъ сливаніи не можетъ быть обнаружена, но капли (зерна-кристаллы) твердаго тѣла при соприкосновеніи могутъ быть различены, т. к. ихъ векторы по разнымъ направленіямъ неодинаковы; отсутствіе границы между ними не происходитъ отъ простаго ихъ соприкосновенія—необходимо еще, чтобы всѣ одинаковые векторы расположились строго параллельно.

Однородныя жидкости, какъ извѣстно, имѣютъ составъ, какъ химически опредѣленныхъ, такъ и неопредѣленныхъ соединеній (напр., растворы). То же самое наблюдается и для твердыхъ тѣлъ. Они также состоятъ изъ отдѣльныхъ кристалловъ — однородныхъ зеренъ — все равно имѣютъ ли эти зерна составъ химически опредѣленнаго или неопредѣленнаго соединенія (§ 67 сл.).

49. Основныя свойства кристалла: его однородность и векторіальность [1]). Изъ сказаннаго очевидно, что для изученія твердаго вещества, необходимо точно знать свойства его твердыхъ элементовъ—зеренъ, кристалловъ. Если эти кристаллы, составляющіе данное тѣло, очень малы и отдѣльно изучены быть не могутъ, то твердое тѣло даетъ суммарное впечатлѣніе. Въ результатѣ изслѣдованія отъ насъ могутъ скрыться настоящія свойства однороднаго твердаго вещества, т. к. при этомъ можетъ исчезнуть правильность свойствъ, зависящая отъ нахожденія въ твердомъ веществѣ векторовъ (§ 44). При такомъ суммарномъ изученіи твердаго тѣла, состоящаго изъ огромнаго количества мельчайшихъ кристалловъ, одинаковые векторы разныхъ кристалловъ необходимо будутъ расположены различно и по каждому направленію такого сложнаго, неоднороднаго твердаго тѣла мы получимъ величину свойства, соотвѣтствующую суммѣ вліянія различныхъ векторовъ многихъ кристалловъ. Нерѣдко этимъ путемъ получится неправильное впечатлѣніе о строеніи твердаго тѣла, при которомъ совершенно исчезнетъ векторіальность его свойствъ. Такой случай представляютъ нѣкоторыя изъ т. наз. *аморфныхъ твердыхъ тѣлъ* (§ 74 сл.).

50. Въ иныхъ случаяхъ (§ 46) можно, однако, наблюдать довольно большіе кристаллы, зерна твердаго тѣла, вполнѣ однородные. Въ нихъ можно легко оріентироваться въ основныхъ свойствахъ твердаго вещества. Возьмемъ одно изъ такихъ веществъ — чистый $NaCl$, т. наз. *каменную соль*. Это безцвѣтное, прозрачное тѣло, которое даетъ иногда кристаллы въ нѣсколько дециметровъ діаметромъ. Возьмемъ кусокъ такого однороднаго вещества любой внѣшней формы. Этотъ кусокъ кристалла — такъ же какъ жидкость — обладаетъ *однородностію*, но въ отличіе отъ жидкости свойства его *векторіальны*. Посмотримъ, что это значитъ. Разобьемъ кусокъ ударомъ молотка. Вещество каменной соли разлетается на *правильныя части*, на многогранники, ограниченные равными, гладкими, блестящими плоскостями. Грани эти различныхъ размѣровъ—но всѣ многогранники имѣютъ нѣчто общее въ своей формѣ: они представляютъ изъ себя параллелипипеды — больше того они даютъ прямоугольные параллелипипеды, иногда кубы (рис. 1).

---

[1]) Векторіальность кристалла обозначаютъ иногда иначе, называютъ это свойство *анизотропностію* кристалла или *золотропіей* (Кельвинъ).

Это свойство распадаться при ударѣ на куски, ограниченные плоскими гранями, присуще только кристалламъ и никогда не наблюдалось ни въ какихъ другихъ тѣлахъ. Оно называется *спайностію*. Мы можемъ, слѣдовательно, сказать, что каменная соль обладаетъ спайностію и даетъ *фигуры спайности*—параллелипипеды.

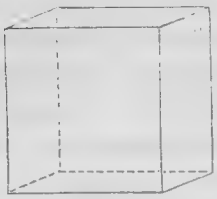


Рис. 1.

51. Для того, чтобы найти аналогію этому свойству спайности, обратимся къ однородной жидкости. Возьмемъ, напримѣръ, массу ртути и произведемъ съ ней опытъ, аналогичный тому, какой мы произвели (§ 50) съ однороднымъ твердымъ тѣломъ — кристалломъ каменной соли. При ударѣ масса ртути разсыпется на отдѣльныя капли—всѣ эти капли будутъ имѣть опредѣленную форму — болѣе или менѣе крупныхъ *шариковъ*. Мы можемъ, слѣдовательно, сказать, что *многогранники спайности кристалла аналогичны каплямъ жидкости*.

Въ зависимости отъ векторіальности въ строеніи твердаго тѣла—его «капли» — кристаллы, очевидно, не могутъ обладать шаровой формой. Можно сказать, что *каплями твердаго тѣла являются кристаллическіе многогранники*.

52. Обратимся къ анализу явленія *спайности*.

Сперва посмотримъ, какъ проявилась здѣсь физическая *однородность* кристалла. Подъ физическою однородностью мы подразумѣваемъ такое строеніе вещества, при которомъ ни одна его точка не можетъ быть отличена отъ другой его точки съ помощью физическаго явленія. Слѣдовательно, въ однородномъ тѣлѣ ихъ нельзя отличить посредствомъ спайности. Другими словами, въ какой бы точкѣ кристалла $NaCl$ мы ни стали проявлять спайность, всюду мы должны встрѣтиться со способностью его раскалываться на прямоугольные параллелипипеды. Слѣдовательно, если мы возьмемъ полученный по спайности параллелипипедъ $NaCl$, снова расколемъ его и будемъ дальше раскалывать каждый новый, меньшій осколокъ спайности—то мы неизмѣнно станемъ получать все новые, все меньшіе такіе же прямоугольные параллелипипеды спайности. Этотъ процессъ будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока, наконецъ, мы прійдемъ къ самымъ мелкимъ возможнымъ для $NaCl$ параллелипипедамъ спайности.

Итакъ, благодаря однородности, не дѣлая никакихъ особыхъ гипотезъ, можно прійти къ заключенію, что кристаллъ *NaCl* какъ бы составленъ изъ отдѣльныхъ параллелипипедовъ спайности, плотно приложенныхъ другъ къ другу. Ихъ величина соотвѣтствуетъ массѣ наименьшихъ возможныхъ твердыхъ молекулъ *NaCl*. Эти мельчайшія части, имѣющія всѣ свойства однороднаго *NaCl*, не могутъ быть видны и грани, сложенныя изъ милліоновъ такихъ параллелипипедовъ кажутся намъ гладкими и блестящими.

Очевидно, благодаря однородности (§ 47), всѣ эти мельчайшіе параллелипипеды спайности должны быть расположены строго параллельно другъ къ другу, т. к. иначе мы могли бы отличить съ помощью спайности точки тѣла, въ которыхъ они не параллельны. Можно представить себѣ, въ концѣ концовъ, кристаллъ *NaCl* состоящимъ изъ мельчайшихъ, возможныхъ для каменной соли, поліэдровъ спайности (т. е. твердыхъ молекулъ), расположенныхъ въ пространствѣ строго параллельно другъ къ другу и обладающихъ одной и той же массой, которая отвѣчаетъ массѣ молекулы твердаго *NaCl*.

53. Въ этомъ явленіи *векторіальность* вещества проявляется въ формѣ поліэдра спайности. Эта форма ясно показываетъ, что три направленія, перпендикулярныя гранямъ поліэдра спайности (т. е. перпендикуляры къ плоскостямъ параллелипипеда), рѣзко отличаются по своимъ свойствамъ отъ всѣхъ остальныхъ направленій въ кристаллѣ. Силы сцѣпленія, сопротивленія разрыву, по всѣмъ этимъ тремъ векторамъ (взаимноперпендикулярнымъ) рѣзко отличаются отъ проявленій того же свойства по другимъ векторамъ. Вещество разрывается по направленіямъ наименьшаго сопротивленія—а т. к. кристаллъ *NaCl* всегда раскалывается только перпендикулярно этимъ тремъ векторамъ, причемъ получаются плоскости перпендикулярныя всѣмъ этимъ тремъ векторамъ одновременно, то мы въ правѣ заключить, что всѣ эти три вектора [1]) *идентичны* (§ 44) и отличны отъ прочихъ.

54. Если мы возьмемъ другіе кристаллы, другія твердыя вещества, то и въ нихъ при ударѣ мы увидимъ проявленія спайности; однако,

---

[1]) Очевидно, надо принимать во вниманіе всѣ векторы, параллельные даннымъ. Иначе при разрывѣ не получилась бы грань.

при этомъ получатся, вообще говоря, многогранники иной формы— т. е. получится иное распредѣленіе векторовъ для даннаго свойства. Такъ кристаллы $CaCO_3$ (исландскій шпатъ) разламываются на косые параллелипипеды (т. наз. ромбоэдры), иной формы, чѣмъ параллелипипеды для $NaCl$ (рис. 2): если мы измѣримъ ихъ гранные углы, напр. между плоскостями $ABCD$ и $ABEF$, то получимъ уголъ равный 105°5′—тогда какъ для многогранниковъ спайности $NaCl$ эти углы равны 90°. Подобно тому, какъ наблюдали это для $NaCl$, (§ 52) всѣ поліэдры кальцита будутъ имѣть тѣ же углы, будутъ расположены въ пространствѣ строго параллельно. Въ этомъ проявляется однородность кристалла кальцита. Его векторіальность видна изъ рѣзкаго отличія трехъ векторовъ, перпендикулярныхъ ромбоэдру спайности, отъ всѣхъ другихъ векторовъ въ кристаллѣ.

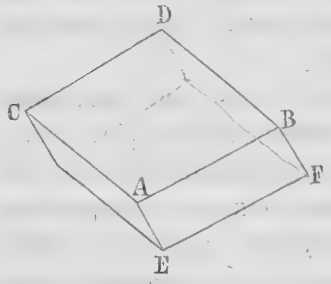


Рис. 2.

Изъ этого опыта ясно, что однородное вещество обладаетъ различнымъ расположеніемъ векторовъ въ пространствѣ въ зависимости отъ химическаго состава. И въ $NaCl$, и въ $CaCO_3$ есть три вектора съ наименьшимъ сцѣпленіемъ при ударѣ, но въ $NaCl$ они дѣлаютъ между собою уголъ въ 90°, а въ $CaCO_3$—105°5′.

55. Совершенно то же самое видно и на всякомъ другомъ кристаллѣ. Съ помощью спайности можно изучать расположеніе особенныхъ направленій, особенныхъ векторовъ въ пространствѣ и убѣдиться, что для каждаго химическаго соединенія эти векторы зависятъ отъ состава, т. е. отъ молекулярной структуры твердаго тѣла.

Этимъ путемъ далеко не всегда получается замкнутый многогранникъ, какъ мы это видѣли для $NaCl$ и $CaCO_3$. Иногда, напр., оказывается, что въ кристаллѣ существуетъ *одинъ* векторъ, рѣзко отличный отъ другихъ и вещество при ударѣ раскалывается на пластинки, на тонкіе листочки перпендикулярно этому вектору. Это мы наблюдаемъ, напр., въ минералѣ — *слюдѣ*, которая обладаетъ спайностью по одной плоскости и изъ которой можно получить этимъ путемъ пластинки толщиною въ доли микроновъ.

56. Явленіе спайности уже давно обратило на себя вниманіе

ученыхъ (§ 10) и уже Бергманнъ и Гаюи (§ 16) предположили, что мельчайшіе поліэдры спайности даютъ понятіе о формѣ молекулъ твердаго тѣла. Они считали кристаллъ составленнымъ изъ поліэдрическихъ молекулъ, тѣсно приложенныхъ другъ къ другу параллельными рядами. Однако, уже случаи спайности, при которой не получаются поліэдры (§ 55) противорѣчатъ такому представленію. Оно станетъ намъ еще болѣе чуждымъ, если мы обратимся къ какому нибудь другому явленію, которое также способно открыть намъ поліэдрическую структуру кристалла. Въ 1867 году Тюбингенскій профессоръ Рейшъ, наблюдая явленія спайности въ каменной соли, нашелъ, что кристаллы разламываются по другимъ плоскостямъ и даютъ другіе многогранники, если измѣнить характеръ удара. Для этого надо ударять кристаллъ острымъ предметомъ, напр. остріемъ иглы. Если производить ударъ по какой нибудь плоскости кристалла, напр., на его поліэдрѣ спайности, то новые разломы выразятся на плоскости спайности въ формѣ трещинъ и эти трещины образуютъ правильную фигуру, т. наз. *фигуру удара.* Причина этого явленія сложная и можетъ быть понята лишь въ связи съ изученіемъ явленій скольженія (см.). Намъ здѣсь нѣтъ надобности останавливаться на объясненіи этого физическаго явленія, необходимо лишь выяснить его связь съ однородностію и векторіальностью кристалла, какова бы ни была его причина. Для этого разсмотримъ его на примѣрѣ каменной соли.

57. Опытъ производятъ такъ. На плоскость кристаллическаго многогранника ставятъ перпендикулярно ей острую стальную иглу и быстро слегка ударяютъ по ней молоткомъ. Вокругъ мѣста удара—вхожденія иглы въ тѣло—появляются трещины, которыя выражаются на плоскости поліэдра спайности $NaCl$ въ формѣ четырехлучевой звѣзды. Эта звѣзда носитъ названіе *фигуры удара.* Въ каменной соли эта фигура образована трещинами, перпендикулярными плоскости спайности и ея лучи дѣлятъ углы четырехугольныхъ плоскостей многогранника пополамъ (рис. 3).

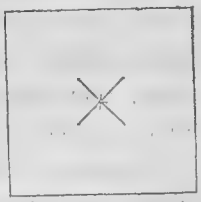


Рис. 3.

Однородность кристалла выражается въ томъ, что мы получаемъ точно такую же фигуру удара, лучи которой параллельны данной, во всякой точкѣ и на всякой плоскости спайности $NaCl$.

Трещины, образующія фигуру удара, представляютъ слѣды плоскостей разлома, по которымъ при данныхъ условіяхъ раскалывается вещество *NaCl*; перпендикуляры къ этимъ плоскостямъ являются векторами, которые при данныхъ условіяхъ оказываютъ наименьшее сопротивленіе разрыву.

Ясно, что эти векторы не совпадаютъ съ векторами спайности (§ 53). Очевидно, число такихъ векторовъ равно 6, такъ какъ ихъ по два на каждой плоскости параллелипипеда спайности [1]). Они очевидно выходятъ по серединѣ реберъ этого параллелипипеда (если мы ихъ всѣхъ перенесемъ въ центръ параллелипипеда). Если провести плоскости перпендикулярно этимъ векторамъ, то получится многогранникъ, ограниченный 12 плоскостями, такъ называемый *ромбическій додекаэдръ* (рис. 4), параллельно плоскостямъ котораго будетъ раскалываться *NaCl* при вхожденіи въ него острія иглы.

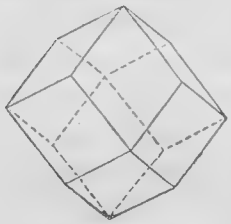


Рис. 4.

58. Разсуждая такъ же, какъ мы это дѣлали для явленій спайности (§ 52) мы увидимъ, что въ концѣ концовъ повторяя этотъ процессъ удара до конца, все на меньшихъ и меньшихъ плоскостяхъ *NaCl*, мы прійдемъ къ мельчайшей массѣ твердаго *NaCl*, обладающей свойствами неизмѣнными для этого тѣла (т. е. къ твердой молекулѣ). Однако, молекула эта должна имѣть уже форму не прямоугольнаго параллелипипеда, а ромбическаго додекаэдра.

Мы съ такимъ же правомъ, какъ это сдѣлали исходя изъ спайности, можемъ себѣ представить вещество *NaCl* составленнымъ изъ безчисленнаго множества мельчайшихъ ромбическихъ додекаэдровъ удара, при чемъ масса каждаго ромбическаго додекаэдра соотвѣтствуетъ массѣ твердой молекулы *NaCl*.

Очевидно, слѣдовательно, что ни многогранникъ спайности NaCl, ни его же многогранникъ удара не даютъ намъ никакого представленія о формѣ молекулы твердаго кристаллическаго вещества—они служатъ лишь указателями векторіальности его строенія. Каждый

---

[1]) Т.-е. два перпендикуляра къ лучамъ звѣзды. Векторы двухъ параллельныхъ плоскостей параллелипипеда спайности совпадаютъ (или другими словами параллельны).

такой многогранникъ представляетъ геометрическую фигуру, выражающую законъ распредѣленія въ кристаллѣ векторовъ, обладающихъ для даннаго явленія особыми свойствами.

Совершенно то же самое мы получимъ для исландскаго шпата и для слюды, если изучимъ ихъ фигуры удара. Для перваго фигура удара представляетъ треугольники, для второго неправильныя шестилучевыя звѣзды. Эти фигуры показываютъ, что плоскости разлома при ударѣ не соотвѣтствуютъ плоскостямъ спайности. Въ зависимости отъ характера молекулярнаго строенія слюды и исландскаго шпата эти векторы расположены въ пространствѣ иначе, чѣмъ векторы удара для $NaCl$ и соотвѣтственные имъ поліэдры имѣютъ иную форму.

59. Можно было бы повторить подобнаго рода опыты еще многими другими пріемами и мы всюду стали бы получать все новые и новые многогранники для разныхъ изучаемыхъ нами явленій въ одномъ и томъ же кристаллическомъ веществѣ. Они не даютъ намъ никакого представленія о формѣ молекулы, но выражаютъ законъ распредѣленія векторовъ въ пространствѣ для даннаго свойства. Въ мельчайшей частицѣ твердаго тѣла, обладающей всѣми его свойствами, векторы въ молекулѣ подчиняются тѣмъ же законамъ, какіе извѣстны для цѣлаго тѣла; если бы можно было отдѣльно получить молекулу твердаго тѣла, оказалось бы что она принимаетъ разную геометрическую фигуру въ зависимости отъ того явленія, какое мы въ ней изучаемъ. Ея векторы для разныхъ свойствъ не совпадаютъ.

Однако, далеко не всегда законы распредѣленія векторовъ въ кристаллѣ выражаются многогранникомъ. Есть явленія, измѣненія которыхъ въ кристаллѣ выражаются другими поверхностями. Къ числу подобнаго рода явленій относятся, напр., свѣтовыя свойства тѣлъ. Возьмемъ, напримѣръ, показателей преломленій для какой нибудь свѣтовой волны, напр., для Фрауэнгоферовой линіи D. Въ такомъ случаѣ для каменной соли величина показателя преломленія по всѣмъ направленіямъ будетъ одна и та же (1.5441 при 20 C°)—т.-е. для даннаго свойства всѣ векторы равны и идентичны (§ 44). Для даннаго свойства векторіальность строенія не видна, но однородность сказывается въ томъ, что во всякой точкѣ кристалла получится одна и та же величина показателя преломленія. Графическій законъ показателей преломленія выразится *шаромъ*, такъ какъ векторы для

него (радіусы шара) по всѣмъ направленіямъ равны. Явленіе сохранится для всѣхъ мельчайшихъ частицъ кристалла $NaCl$, для твердыхъ его молекулъ и мы можемъ представить это вещество состоящимъ изъ мельчайшихъ шариковъ, величина которыхъ опредѣлится массой молекулы твердаго вещества, а форма отношеніемъ $NaCl$ къ показателямъ преломленія по разнымъ направленіямъ.

Здѣсь въ законѣ явленія не видно многогранника; также не видно въ немъ и различія въ свойствахъ векторовъ (вещество *изотропно* для даннаго явленія). Въ другихъ тѣлахъ наблюдается ясно выраженное различіе векторовъ также и по отношенію къ свѣтовымъ волнамъ. Такъ напр., въ $CaCO_3$ для поляризованнаго луча ε (такъ называемаго «необыкновеннаго луча») для волнъ, соотвѣтствующихъ Фрауэнгоферовой линіи D показатель преломленія по разнымъ направленіямъ колеблется между 1.4865 и 1.6584 (для 20° С). Слѣдовательно, векторы для даннаго явленія различны. Законъ ихъ измѣненія выражается *эллипсоидомъ вращенія*, при чемъ ось его вращенія соотвѣтствуетъ показателю преломленія 1.6584. Однородность вещества отражается въ томъ, что во всякой точкѣ $CaCO_3$ явленіе подчиняется однимъ и тѣмъ же эллипсоидамъ, оси которыхъ строго параллельны. Этотъ эллипсоидъ даетъ намъ представленіе о распредѣленіи векторовъ для даннаго свойства въ кристаллѣ. Разсуждая и здѣсь подобно тому, какъ мы это дѣлали раньше (§ 52), можно представить себѣ вещество исландскаго шпата ($CaCO_3$) состоящимъ изъ молекулъ имѣющихъ форму и положеніе въ пространствѣ данныхъ эллипсоидовъ, ибо и для молекулы оптическія свойства волны ε линіи D сохранятся тѣ же, какія наблюдаются для всего кристалла $CaCO_3$. Такова была теорія строенія вещества исландскаго шпата, данная Гюйгенсомъ (§ 11).

60. Итакъ кристаллъ обладаетъ *однородностію* и *векторіальностію*. Онѣ проявляются въ немъ во всякомъ свойствѣ, во всякомъ явленіи. Благодаря векторіальности всѣ наблюдаемыя свойства кристалла могутъ быть выражены въ формѣ многогранниковъ или другихъ геометрическихъ поверхностей. Но эти поверхности не даютъ намъ никакого понятія о формѣ молекулы твердаго тѣла.

Изучая различныя поверхности физическихъ явленій для одного и того же кристаллическаго тѣла, мы можемъ однако получать болѣе ясное представленіе о его строеніи. Для этого намъ необходимо

1) сравнивать отдѣльныя геометрическія поверхности для разныхъ свойствъ и находить общія, присущія всѣмъ имъ законности и 2) изучать взаимное расположеніе въ кристаллѣ этихъ поверхностей.

Законности отдѣльныхъ поверхностей выражаются въ такъ называемыхъ явленіяхъ *симметріи*. Въ симметріи или правильности такихъ геометрическихъ поверхностей отражается молекулярная структура кристалла. Такимъ образомъ изучая симметрію существующихъ для даннаго тѣла поверхностей мы можемъ понять главныя архитектурныя черты кристалла. Еще рѣзче проявляется эта правильность при сравненіи взаимнаго расположенія различныхъ поверхностей въ кристаллѣ: этимъ путемъ удается еще полнѣе уловить основныя черты молекулярной группировки.

Изученіе геометріи поверхностей для разныхъ физическихъ явленій и сравненіе ихъ взаимнаго расположенія въ кристаллѣ служитъ основнымъ фономъ всякой кристаллографической работы. Этимъ путемъ мы подраздѣляемъ кристаллическое вещество на опредѣленные классы, познаемъ вліяніе химическаго состава на молекулярную группировку кристалла. Такого рода геометрическая работа проникаетъ всю кристаллографію.

61. Гомологическія точки. Пространственныя рѣшетки. Исходя изъ разсмотрѣнныхъ въ предыдущихъ параграфахъ основныхъ свойствъ кристалловъ, мы сейчасъ же можемъ придать имъ крайне простое и удобное для работы геометрическое выраженіе. Изъ многообразія природныхъ явленій въ кристаллѣ выдѣлимъ въ немъ самыя основныя, общія свойства—однородности и векторіальности, которыя, какъ мы видѣли, рѣзко отличаютъ его отъ жидкостей или газовъ. При этомъ будемъ избѣгать какихъ бы то ни было гипотезъ и будемъ дѣлать ихъ только постольку, поскольку это безусловно необходимо для выраженія основныхъ свойствъ кристалла. Этимъ путемъ мы дадимъ научное теоретическое представленіе о кристаллѣ, которое позволитъ примѣнить дедукцію и имѣть вѣрную нить для разъясненія сложныхъ природныхъ явленій. Основныя черты этихъ геометрическихъ представленій о кристаллѣ были уже (§ 16) выражены Гаюи (1784—1801), въ его теоріи строенія кристалловъ изъ молекулъ-поліэдровъ (§ 56); позже, въ 1835 году, Франкенгеймъ далъ основанія ниже изложенной теоріи структуры изъ гомологическихъ точекъ. Независимо отъ него эти идеи были развиты Дела-

фоссомъ (1840) и наконецъ въ болѣе строго выдержанной формѣ его послѣдователемъ Бравэ (1849—1851) (§ 29).

62. Мы уже видѣли (§ 47), что однородность кристалла выражается въ томъ, что во всякой его точкѣ свойства подчиняются одинаковымъ законамъ; это ясно изъ того, что соотвѣтствующія этимъ законамъ геометрическія поверхности одинаковы во всѣхъ точкахъ тѣла и расположены строго параллельно. Исходя изъ атомистическаго строенія вещества, неизбѣжно прійдется допустить, что, благодаря однородности, каждая молекула твердаго вещества будетъ обладать одинаковыми признаками и слѣдовательно представлять изъ себя мельчайшую массу твердаго тѣла, обладающую неизмѣнно всѣми его свойствами. Слѣдовательно каждая молекула твердаго тѣла должна (§ 52, 59) выражаться въ той или иной геометрической фигурѣ въ зависимости отъ того, какимъ способомъ мы ее изслѣдуемъ. Кристаллъ состоитъ изъ твердыхъ молекулъ, расположенныхъ тѣсно рядомъ другъ съ другомъ, такъ что идентичные векторы въ каждой изъ нихъ строго параллельны тѣмъ же векторамъ въ другой молекулѣ того же кристалла. Если бы векторы были не параллельны—можно было бы отличить физическими пріемами двѣ молекулы (т.-е. двѣ точки) кристалла другъ отъ друга, слѣдовательно кристаллъ не обладалъ бы однородностію (§ 47). Возьмемъ внутри любой молекулы кристалла какую нибудь точку такъ, чтобы она занимала опредѣленное положеніе по отношенію къ какой нибудь геометрической поверхности, выражающей какое нибудь физическое явленіе въ данной молекулѣ. Напримѣръ, возьмемъ срединную точку (центръ) въ параллелепипедѣ спайности молекулы *NaCl* (§ 52). Будемъ брать такъ же, какъ и въ первой молекулѣ по одной также выбранной точкѣ во всѣхъ другихъ молекулахъ тѣла. Эти точки одинаковымъ образомъ выбранныя въ каждой молекулѣ будемъ называть *гомологическими точками* кристалла [1]). Въ кристаллѣ будетъ столько гомологическихъ точекъ, сколько въ немъ молекулъ, ибо въ каждой молекулѣ будетъ по одной гомологической точкѣ. Какъ лежитъ гомологическая точка внутри молекулы безраз-

---

[1]) Федоровъ (1891) переводитъ этотъ терминъ Бравэ русскими словами *„соотвѣтственныя точки“*. Малляръ (1878) называетъ ихъ *аналогичными точками*.

лично, необходимо только, чтобы она въ каждой молекулѣ была выбрана такъ же, какъ и во всѣхъ другихъ. Можно, напр., взять ее не въ центрѣ, а въ одномъ изъ угловъ параллелепипеда спайности *NaCl*, или въ одномъ изъ угловъ ромбическаго додекаэдра удара для того же вещества (§ 57) или въ центрѣ шара показателей преломленій и т. д. Но въ такомъ случаѣ безусловно необходимо точно также выбрать гомологическую точку во всѣхъ молекулахъ кристалла. Очевидно, гомологическія точки даютъ намъ до извѣстной степени отпечатокъ молекулярной структуры кристалла, такъ какъ онѣ во 1-хъ находятся въ опредѣленномъ положеніи, одинаковомъ для всѣхъ молекулъ, относительно векторовъ молекулы и во 2-хъ лежатъ другъ отъ друга на разстояніяхъ, зависящихъ отъ формы геометрическихъ поверхностей, выражающихъ какое нибудь физическое явленіе въ кристаллѣ. Очевидно, эти разстоянія между двумя какими нибудь гомологическими точками должны быть *конечныя, опредѣленныя*, хотя и чрезвычайно малыя;—онѣ не могутъ быть безконечно малы, ибо въ основѣ нашего атомистическаго представленія о строеніи вещества лежитъ увѣренность, что атомы вещества, какъ бы малы они ни были—представляютъ строго опредѣленныя массы его, занимающія извѣстное пространство. Очевидно, тоже самое должно существовать и по отношенію къ состоящимъ изъ атомовъ твердымъ молекуламъ. Если бы двѣ гомологическія точки совпали, неизбѣжно пришлось бы допустить возможность уничтоженія молекулъ или атомовъ, т.-е. уничтоженія матеріи, чему противорѣчитъ вѣковой научный опытъ. Очевидно, это разстояніе должно зависить: 1) отъ величины молекулъ или величины радіусовъ сферъ ихъ воздѣйствія, если молекулы не плотно сближены и 2) отъ формы той геометрической поверхности, по отношенію къ которой мы опредѣленнымъ образомъ выбрали гомологическую точку. Для разныхъ свойствъ получаются разныя геометрическія фигуры, но всѣ эти фигуры находятся въ извѣстныхъ соотношеніяхъ (§ 60), такъ какъ онѣ служатъ проявленіемъ одной и той же структуры. Поэтому гомологическая точка, какимъ нибудь строго опредѣленнымъ образомъ выбранная для одной поверхности, занимаетъ геометрически опредѣленное мѣсто и для всякой другой поверхности свойствъ того же химическаго тѣла. Изъ самаго опредѣленія однородности ясно, что гомологическія точки будутъ занимать оди-

наковыя положенія во всѣхъ молекулахъ по отношеніи ко всѣмъ возможнымъ для нихъ поверхностямъ.

63. Въ это опредѣленіе нами введена одна гипотеза—объ атомистическомъ строеніи вещества. И хотя эта гипотеза лежитъ въ основаніи многихъ нашихъ основныхъ научныхъ воззрѣній и что еще важнѣе, совершенно незамѣнима, какъ орудіе научной работы въ пониманіи и точномъ предвычисленіи явленій природы—все же она не составляетъ факта, доказаннаго опытомъ или наблюденіемъ. Поэтому, необходимо отмѣтить, что все сказанное о гомологическихъ точкахъ цѣликомъ сохранится, если отбросить атомистическое представленіе о строеніи вещества и замѣнить его динамическимъ. Считая вещество непрерывнымъ—прійдется неизбѣжно допустить въ той или иной формѣ различную группировку энергіи въ этой непрерывной матеріи т. е. существованіе центровъ (точекъ), которые ни въ какомъ случаѣ не могутъ быть сближены, такъ какъ иначе произошло бы уничтоженіе энергіи. Очевидно въ такой средѣ гомологическія точки должны быть взяты въ различныхъ мѣстахъ непрерывной матеріи по отношенію къ существующимъ центрамъ силъ или энергіи. Онѣ должны быть оріентированы по отношенію къ этимъ центрамъ такъ же, какъ мы ихъ оріентировали по отношенію къ молекуламъ. Къ такому динамическому воззрѣнію на строеніе кристалла въ связи съ гомологическими точками, очевидно — mutatis mutandis — цѣликомъ приложимо все, что выяснено въ § 62 по отношенію къ атомистическому. Здѣсь не мѣсто вдаваться въ болѣе подробное разсмотрѣніе этого вопроса, такъ какъ динамическія воззрѣнія на строеніе матеріи не приняли пока удобной для научной работы формы и атомистическія представленія являются въ настоящее время незамѣнимыми въ физическихъ работахъ. Во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи кристаллографіи я буду исходить изъ *молекулярнаго* представленія о его строеніи, признавая однако за такимъ представленіемъ только значеніе незамѣнимой научной рабочей гипотезы, а не считая его за выводъ изъ научныхъ изслѣдованій. Важно отмѣтить лишь, что представленіе о строеніи кристалла изъ гомологическихъ точекъ совершенно совмѣстимо съ динамическими идеями о строеніи вещества, имѣющими за себя много научныхъ (напр. идея объ эѳирѣ) и философскихъ наведеній.

64. Итакъ, каждый кристаллъ состоитъ изъ *гомологическихъ точекъ*. Въ такомъ случаѣ каждая линія, проведенная въ кристаллѣ черезъ одну гомологическую точку, пройдетъ черезъ множество гомологическихъ точекъ. Очевидно, вслѣдствіе однородности, гомологическія точки данной линіи будутъ находиться на опредѣленныхъ разстояніяхъ. Такую линію, проходящую черезъ гомологическія точки, мы будемъ называть *рядомъ*, а разстоянія между гомологическими точками на данномъ рядѣ, будемъ называть ихъ *параметрами*. Параметры на одномъ и томъ же рядѣ будутъ всѣ одинаковы и будутъ представлять какое-нибудь конечное, опредѣленное разстояніе. Возьмемъ напр. (рис. 5) гомологическую точку A_0. Вокругъ нея во всѣ стороны лежитъ множество гомологическихъ точекъ, строющихъ кристаллъ. Онѣ находятся отъ нея на разныхъ разстояніяхъ. Возьмемъ ближайшую къ ней точку A_1, при чемъ

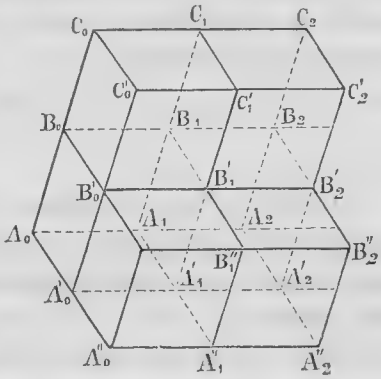


Рис. 5.

$$A_0 \; A_1 = a.$$

Если провести черезъ $A_0 \; A_1$ рядъ, то на немъ во всѣ стороны на разстояніи a, будутъ лежать другія его гомологическія точки A_2, A_3 и т. д.; благодаря однородности $A_0 \; A_1 = A_1 \; A_2 = A_2 \; A_3 = \ldots = a$. Среди массы другихъ гомологическихъ точекъ найдемъ другую ближайшую къ A_0, напр. A'_0, при чемъ

$$A_0 \; A'_0 = b$$

Въ такомъ случаѣ проведемъ рядъ черезъ $A_0 \; A'_0$; очевидно, и въ немъ, благодаря однородности на томъ же разстояніи b, мы встрѣтимъ все новыя и новыя гомологическія точки A_0'', A_0''' и т. д.

Обратимъ теперь вниманіе на плоскость $A_0 \; A_1 \; A'_0$. Очевидно въ этой плоскости будетъ лежать безконечное множество рядовъ съ параметромъ a, параллельныхъ $A_0 \; A_1$ и рядовъ съ параметромъ b, параллельныхъ $A_0 \; A'_0$. Ихъ будетъ множество, такъ какъ все вещество однородно, слѣдовательно его точки не отличимы, т.-е. го-

мологическая точка A_0 не отличима отъ гомологической точки A_1 и если ближайшая послѣ A_1 гомологическая точка къ A_0 лежитъ на разстояніи b, въ направленіи $A_0\ A'_0$—то тоже самое имѣетъ мѣсто и по отношенію къ точкѣ A_1 по направленію параллельному $A_0\ A'_0$: такой будетъ точка A'_1 при чемъ $A_1\ A_1'$ параллельна $A_0\ A'_0$. Мы имѣемъ, слѣдовательно,

$$A_0\ A_1 = A'_0\ A_1' = A_0''\ A_1'' = \ldots = a \quad \text{и}$$
$$A_0\ A'_0 = A_1\ A_1' = A_2\ A'_2 = \ldots = b.$$

Этимъ путемъ получится совершенно опредѣленное строеніе плоскости, проведенной черезъ два непараллельныхъ ряда. Такая плоскость будетъ имѣть *сѣтчатое строеніе*, она будетъ составлена изъ *петель* ($A_0\ A_1\ A'_0\ A'_1$, $A_1\ A_2\ A'_1\ A'_2$ и т. д.), въ *узлахъ* которыхъ будутъ находиться гомологическія точки.

Такъ какъ мы выбрали для построенія сѣти ближайшія гомологическія точки, то, очевидно, не можетъ быть гомологическихъ точекъ внутри петель и такая сѣть уловитъ всѣ гомологическія точки плоскости.

65. По отношенію къ нашему пространству необходимо, однако, принять во вниманіе еще третію точку, слѣдующую ближайшую къ A_0. Положимъ такой будетъ B_0, такъ что

$$A_0\ B_0 = c.$$

Въ такомъ случаѣ очевидно изъ каждой гомологической точки сѣти, выйдетъ рядъ съ параметромъ c, параллельный $A_0\ B_0$ и на этихъ рядахъ всюду расположатся гомологическія точки, такъ изъ точки A_0 рядъ $A_0\ B_0\ C_0\ D_0 \ldots$
» » A'_0 » $A'_0\ B'_0\ C'_0\ D'_0 \ldots$
» » A'_2 » $A'_2\ B'_2\ C'_2\ D'_2 \ldots$ и т. д.

Четыре ближайшія гомологическія точки образуютъ параллелипипедъ, стороны котораго построены этими тремя рядами, а въ углахъ находятся узлы петель (гомологическія точки). Параллелепипедъ, выбранный указаннымъ образомъ, будетъ представлять часть матеріи, внутри которой нѣтъ ни одной гомологической точки, ибо въ углахъ его находятся ближайшія между собою гомологическія точки. Такой параллелипипедъ—напр. $A_0 A_1 A'_0 A'_1 B_0 B_1 B'_0 B'_1$—

мы назовемъ *элементарнымъ параллелипипедомъ* или кристаллической *ячейкой*.

Ясно, что все пространство распадется на такія ячейки, причемъ всѣ гомологическія точки кристалла попадутъ въ углы параллелипипедовъ и внутри ячеекъ не будетъ ни одной гомологической точки. Такъ раздѣленное пространство или такая система кристаллическихъ ячеекъ въ своей совокупности представляетъ такъ называемую *пространственную рѣшетку*.

Мы можемъ сказать, что кристаллъ представляетъ пространственную рѣшетку, составленную изъ гомологическихъ точекъ.

Въ этой рѣшеткѣ каждая линія будетъ представлять *рядъ*, каждая плоскость *сѣтчатую плоскость*. Очевидно параметръ всякаго ряда, форма петли каждой плоскости можетъ быть строго выведена, зная положеніе линіи или плоскости въ элементарномъ параллелипипедѣ и зная точно геометрическія свойства этого параллелипипеда.

Всякій параллельный рядъ имѣетъ одни и тѣ же параметры, всякая параллельная плоскость одну и ту же форму петель. Напр. ряды $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ и т. д. имѣютъ параметръ c и т. д. Очевидно сѣтчатыя плоскости $A_0 A_1 B_0 B_1$ или ей параллельныя $A_0' A_1' B_0' B_1'$, $A_0'' A_1'' B_0'' B_1''$ и т. д. имѣютъ одну и ту же форму петель, состоящихъ изъ параллелограммовъ съ сторонами равными a и b и т. д.

66. Я не буду далѣе останавливаться на разборѣ этихъ представленій. Онѣ имѣютъ для насъ первостепенное значеніе, такъ какъ не заключая никакой гипотезы, удобно выражаютъ однородность и векторіальность кристалла. Только послѣ введенія этого представленія явилась возможность изучать вліяніе химическаго состава на кристаллическую форму, такъ какъ оказалось, что *форма кристаллической ячейки находится въ тѣсной (хотя, какъ увидимъ, сложной) связи съ химическимъ составомъ тѣла*. Она также характерна для химическаго соединенія, какъ характерна для него всякая другая физическая константа.

Очевидно, въ этомъ геометрическомъ представленіи о кристаллѣ, какъ пространственной рѣшеткѣ изъ гомологическихъ точекъ, мы далеко не дали полной теоріи строенія кристаллическаго тѣла. Мы даже не использовали всѣхъ имѣющихся у насъ данныхъ, такъ какъ

приняли, что законъ расположенія векторовъ вокругъ гомологической точки намъ неизвѣстенъ. Однако, во многихъ физическихъ явленіяхъ онъ выражается въ правильныхъ геометрическихъ поверхностяхъ, доступныхъ изученію, слѣдовательно можетъ быть выраженъ, какъ увидимъ, математически. Во всякомъ случаѣ несомнѣнно, что во всѣхъ этихъ случаяхъ всѣ геометрически возможныя правильности въ кристаллѣ, зависящія отъ расположенія векторовъ въ молекулѣ, опредѣленнымъ образомъ связаны съ формой его кристаллической ячейки и на ней отражаются, такъ какъ мы взяли для его построенія гомологическія точки въ связи съ физическими свойствами тѣла (§ 62).

Въ дѣйствительности, пространственная рѣшетка играетъ туже роль по отношенію къ молекулярной структурѣ кристалла, какую играютъ три измѣренія всякаго тѣла въ нашемъ пространствѣ. Она служитъ молекулярной системой координатныхъ осей, связанной съ однородностію и векторіальностію кристалла.

67. Химическій составъ кристалла. Опредѣленіе кристалла не будетъ полное, если мы не обратимъ вниманія на его химическій составъ. По аналогіи съ жидкостію (§ 45), составъ кристалла не всегда можетъ выражаться опредѣленной химической формулой.

Болѣе подробно я разсмотрю относящіяся сюда явленія при изложеніи химической кристаллографіи, но здѣсь вкратцѣ необходимо коснуться нѣкоторыхъ фактовъ, такъ какъ уже въ дальнѣйшемъ изложеніи необходимо пользоваться терминами, стоящими въ связи съ этими явленіями.

Изучая химическій составъ кристалла, можно въ настоящее время различить на основаніи состава по крайней мѣрѣ четыре типа твердаго вещества: 1) опредѣленныя химическія соединенія, 2) изоморфныя смѣси, 3) твердые растворы, 4) сложныя твердыя системы, находящіяся въ состояніи, аналогичномъ диссоціаціи.

Несмотря на усиленную работу въ этой области, наши знанія все еще далеко недостаточны для полученія полной картины явленія. Въ то самое время, какъ аналогія между опредѣленными химическими соединеніями, твердыми и жидкими, полная и не возбуждаетъ сомнѣній—положеніе другихъ типовъ твердыхъ соединеній неясно. По многимъ свойствамъ они сходны съ растворами жидкостей—но на ряду съ этимъ обладаютъ признаками, которые

не позволяютъ проводить полной аналогіи съ жидкими растворами. Они однако не могутъ быть соединены въ одну группу и съ опредѣленными химическими соединеніями. Не предрѣшая вопроса, намъ необходимо рѣзко отдѣлить эти соединенія и отъ простыхъ механическихъ смѣсей, такъ какъ онѣ вполнѣ физически однородны и выражаютъ составъ кристалловъ, мельчайшихъ зеренъ, строющихъ всякое твердое тѣло. Я буду называть всѣхъ ихъ *физическими смѣсями*. Такимъ образомъ физической смѣсью будутъ называться физически однородные кристаллы, составъ которыхъ не можетъ быть выраженъ химически опредѣленной, атомной формулой. Къ физическимъ смѣсямъ относятся изоморфныя смѣси, твердые растворы и т. д.

68. Наиболѣе рѣзкое свойство кристалловъ *опредѣленныхъ химическихъ соединеній* заключается въ томъ, что каждому такому соединенію свойственна своя, отличная отъ другихъ, пространственная рѣшетка (§ 66), въ томъ случаѣ, когда пространственная рѣшетка можетъ зависѣть въ своей формѣ отъ химическаго состава. Мы увидимъ въ дальнѣйшемъ изложеніи, что есть случаи, когда пространственная рѣшетка не зависитъ отъ химическаго состава (тѣла такъ называемой правильной системы). Благодаря такому свойству опредѣленныхъ химическихъ соединеній можно ясно изучать вліяніе химическаго состава на строеніе кристалла. Однако, оказывается, что одно и то же тѣло можетъ при разныхъ условіяхъ давать нѣсколько различныхъ пространственныхъ рѣшетокъ—но изъ этихъ рѣшетокъ для опредѣленной температуры и давленія устойчива только одна (явленія такъ назыв. полиморфизма). Можно поэтому сказать въ настоящее время, что каждому опредѣленному соединенію для данныхъ температуры и давленія свойственна своя пространственная рѣшетка.

69. Гораздо сложнѣе явленія въ физическихъ смѣсяхъ. Чрезвычайно часто наблюдаются случаи, когда составъ кристалла не выражается опредѣленной формулой. Среди такихъ тѣлъ наибольшее значеніе имѣютъ такъ называемыя *изоморфныя смѣси*. Такъ были обозначены Митчерлихомъ (§ 28) однородные кристаллы съ колеблящимся составомъ, образующіеся путемъ совмѣстной кристаллизаціи тѣлъ аналогичнаго химическаго состава. Испаряя, напр., вмѣстѣ водные растворы $MgSO_4$ и $ZnSO_4$, мы получимъ кристаллы одного

тиша, которые при полной однородности, при анализѣ дають одновременно Zn и Mg, отношенія между которыми колеблятся. Химическая формула получаемыхъ тѣлъ можетъ быть выражена такъ: $(Mg, Zn) SO_4 7H_2 O$. Изъ этой формулы видно, что между S, O и т. д. существуютъ постоянныя отношенія (соотвѣтствуютъ SO_4 и т. д.), но между Mg, Zn и другими элементами соединенія такихъ отношеній нѣтъ. Если же представить себѣ часть Mg замѣщенной Zn и взять сумму ихъ (пропорціонально атомному вѣсу), можно получить точную химическую формулу тѣла. Можно представить себѣ такой кристаллъ состоящимъ изъ смѣси $p\ Mg\ SO_4\ 7H_2\ O + q\ Zn\ SO_4\ 7H_2\ O$, въ которой коэффиціенты p и q колеблятся въ зависимости отъ условій испаренія раствора этихъ солей и количества ихъ въ растворѣ. Эта смѣсь не механическая, такъ какъ 1) кристаллы вполнѣ однородны и 2) ихъ пространственныя рѣшетки и всѣ физическія свойства не отвѣчаютъ пространственнымъ рѣшеткамъ и физическимъ свойствамъ чистыхъ $Mg\ SO_4\ 7H_2\ O$ или $Zn\ SO_4\ 7H_2\ O$. Онѣ промежуточныя между свойствами данныхъ чистыхъ тѣлъ и могутъ быть вычислены, исходя изъ свойствъ химически чистыхъ тѣлъ и коэффиціентовъ p и q. Смѣшеніе тѣлъ проникаетъ глубоко, хотя свойства входящихъ въ изоморфную смѣсь тѣлъ почти не мѣняются. Оказывается, что по каждому вектору изоморфной смѣси получается новая величина, промежуточная между величинами того же вектора въ химически чистыхъ веществахъ, въ зависимости отъ коэффиціентовъ p и q. Дальнѣйшія изслѣдованія указали, что такія смѣси получаются между веществами, химическій составъ которыхъ иногда не имѣетъ между собою ничего общаго— напр., между $Mg\ SiO_3$ и $Mg\ Al_2\ SiO_6$ (въ группѣ минераловъ— авгитовъ и роговыхъ обманокъ) и т. д. Въ такомъ случаѣ такую смѣсь можно выразить только сложной формулой, напр. $p\ Mg\ SiO_3 + q\ Mg\ Al_2\ SiO_6$. Однако далеко не всѣ вещества и не всегда могутъ образовывать изоморфную смѣсь. Какъ мы увидимъ ниже, всѣ кристаллы на основаніи своихъ векторіальныхъ свойствъ распадаются на 32 группы, на такъ называемыя 32 строенія (§ 113). Оказывается, что только тѣ тѣла могутъ давать изоморфныя смѣси, которыя принадлежатъ къ одному и тому же строенію.

Какъ мы увидимъ (см. главу о полиморфизмѣ) каждое изъ 32 строеній соотвѣтствуетъ одному изъ *состояній* твердой матеріи,

аналогичному жидкости или газу, отвѣчаетъ различной фазѣ тѣла. Можно сказать, поэтому, что изоморфныя смѣси отвѣчаютъ смѣсямъ тѣлъ одинаковой фазы. Пользуясь сравненіемъ съ неопредѣленными жидкими или газообразными соединеніями можно сказать, что изоморфными смѣсями называются такія физическія смѣси кристалловъ, которыя аналогичны растворамъ жидкости въ жидкости или газовымъ смѣсямъ.

Нерѣдко въ кристаллѣ, въ изоморфной смѣси, смѣшиваются много—иногда десятки—химическихъ соединеній. Въ такомъ случаѣ получаются чрезвычайно измѣнчивыя явленія по векторамъ, такъ какъ каждый векторъ оказываетъ суммарное вліяніе на свойство, въ зависимости отъ свойствъ того же вектора элементарныхъ соединеній смѣси и ихъ количества. Благодаря этому кристаллы изоморфныхъ смѣсей даютъ много своеобразныхъ явленій, особенно въ области оптическихъ свойствъ, явленій, которыя не могутъ имѣть мѣста среди химически опредѣленныхъ тѣлъ. Главнымъ отличіемъ служитъ *измѣнчивость* свойствъ, ихъ непостоянство отъ кристалла къ кристаллу.

70. Другимъ типомъ физическихъ смѣсей въ кристаллѣ служатъ такъ называемые *твердые растворы*. Аналогія съ жидкими растворам здѣсь довольно полная, хотя нѣкоторые изслѣдователи, напр. Бодлендеръ (1899 г.), пытаются объяснить эти явленія чисто физическими процессами, подобными прилипанію или поглощенію (адсорпціи). Въ данномъ случаѣ споръ въ значительной степени идетъ о словахъ, такъ какъ процессы прилипанія и т. п., дающіе въ результатѣ физически однородное тѣло (т. е. «молекулярное прилипаніе») едва ли въ чемъ будутъ отличаться отъ твердыхъ растворовъ. Наиболѣе рѣзкій примѣръ такого рода тѣлъ представляютъ окрашенные кристаллы, способные поглощать разнообразныя красящія вещества. Эти тѣла были извѣстны давно — но въ послѣдніе года сперва Леманнъ (1891 сл.), повторяя старые опыты де-Сенармона (1854), потомъ другіе показали, что кристаллы способны поглощать разнообразныя краски и окрашиваться, вполнѣ сохраняя свою однородность. Нерѣдко при самыхъ сильныхъ увеличеніяхъ нельзя замѣтить никакой неоднородности—краска какъ будто растворилась въ данномъ тѣлѣ. Въ такихъ твердыхъ смѣсяхъ свойства тѣла мѣняются (напр., иногда показатели преломленія), но очень слабо. Такъ въ

кристаллѣ растворяются жидкія, газообразныя (можетъ быть твердыя) вещества — обыкновенно въ очень небольшомъ количествѣ; между ними и кристалломъ нѣтъ ничего общаго. Химической опредѣленной формулы такого сложнаго тѣла получить нельзя. Однако такіе кристаллы даютъ рядъ новыхъ свойствъ, отсутствующихъ въ химически опредѣленныхъ тѣлахъ, напр. нѣкоторыя явленія связанныя съ поглощеніемъ свѣта.

71. Наконецъ, есть еще тѣла, близкія къ твердымъ растворамъ, которыя не могутъ быть подведены къ изоморфнымъ смѣсямъ и въ то же время рѣзко отличаются отъ обычныхъ твердыхъ растворовъ. Кристаллы этого типа изучены очень мало, наилучше въ одной группѣ тѣлъ, въ богатыхъ водою алюмосиликатахъ кальція, натрія, калія и т. д., въ нѣкоторыхъ изъ такъ называемыхъ *цеолитовъ*. Явленія этого рода были замѣчены очень давно; на нихъ остановились еще французскіе химики Малагути и Дюрошэ (1846 г.), но точнѣе изучилъ ихъ впервые Дамуръ (1857 г.). Эти изслѣдователи замѣтили, что нѣкоторые цеолиты теряютъ воду въ зависимости отъ упругости водяного пара въ пространствѣ окружающемъ кристаллъ, оставаясь вполнѣ твердыми, кристаллическими, однородными. Въ извѣстныхъ предѣлахъ при нагрѣваніи не свыше опредѣленной температуры или въ эксикаторѣ такіе кристаллы вполнѣ постепенно теряютъ воду. Этотъ процессъ потери воды цеолитами совершенно подобенъ испаренію воды изъ какого нибудь сосуда; онъ только идетъ болѣе медленно и окончательно завершается при болѣе высокой температурѣ. Происходитъ какъ бы молекулярное испареніе воды. При охлажденіи или во влажномъ пространствѣ кристаллъ вновь вбираетъ то же количество воды. Въ 1882 г. Маллярь впервые обратилъ вниманіе на совершенно необычныя свѣтовыя свойства этихъ кристалловъ при такомъ молекулярномъ испареніи или поглощеніи воды: при полной однородности вещества, его свѣтовыя свойства мѣняются въ тѣсной зависимости отъ измѣненія состава. Кристаллъ является какъ бы подвижнымъ тѣломъ въ своихъ физическихъ свойствахъ. Дальнѣйшій шагъ былъ сдѣланъ въ 1896 году Фриделемъ. Онъ нашелъ, что вода въ цеолитахъ можетъ быть замѣщена цѣлымъ рядомъ другихъ тѣлъ—NH_3, CS_2, спиртами, кислородомъ и т. п., при чемъ кристаллы все время сохраняютъ свою однородность и болѣе или менѣе рѣзко мѣняютъ свои физическія

свойства. Въ то же время никакая опредѣленная химическая формула не отвѣчаетъ этимъ подвижнымъ системамъ.

72. Составъ этихъ сложныхъ тѣлъ можетъ быть выраженъ формулой $R+A$, гдѣ R есть неизмѣнная составная часть кристалла, напр., въ анальцимѣ — $Na_2\ Al_2\ Si_4\ O_{12}$, а A — есть измѣнчивое, зависящее отъ состава окружающей среды, химическое тѣло, легко связанное съ R, но рѣзко вліяющее на его физическія свойства. Сложность строенія этихъ тѣлъ увеличивается благодаря тому что R можетъ состоять изъ опредѣленнаго химическаго соединенія, изоморфной смѣси или твердаго раствора, а въ A одновременно могутъ входить нѣсколько разныхъ веществъ.

Кромѣ цеолитовъ мы встрѣчаемъ много твердыхъ веществъ того же характера. Таковы, напр., многочисленные гидраты окисей желѣза, многіе гидраты силикатовъ и т. п. Сюда относятся разнообразные минералы, многія тѣла организмовъ, продукты нашихъ лабораторій. Но всѣ они изучены мало, такъ какъ ихъ отдѣльные кристаллы рѣдко достигаютъ значительныхъ размѣровъ. Поэтому ихъ изслѣдованіе представляетъ значительныя трудности.

Въ такихъ кристаллахъ мы имѣемъ дѣло со сложными системами твердыхъ химическихъ тѣлъ, находящимися въ состояніи диссоціаціи. Аналоговъ имъ мы не имѣемъ среди жидкихъ срединъ. Очевидно и наблюдаемыя въ нихъ физическія явленія нерѣдко весьма своеобразны.

73. Эти тѣла являются въ настоящее время предѣломъ нашего знанія; они пока должны считаться наиболѣе сложными по составу кристаллами, доступными точному изученію. Среди минеральныхъ тѣлъ и среди продуктовъ нашихъ лабораторій мы встрѣчаемся, однако, еще съ другими сложными твердыми структурами, съ физическими смѣсями, которыя не подходятъ ни къ одному изъ разсмотрѣнныхъ классовъ. Выясненіе строенія этихъ тѣлъ есть дѣло будущаго. Таковы, напр., кристаллы металловъ, содержащіе газы (близки къ расмотрѣннымъ въ § 71—72 цеолитамъ), такъ называемыя рацемическія разности углеродистыхъ соединеній, вращающихъ плоскость поляризаціи свѣта [1]) и т. д.

---

[1]) Къ строенію этихъ оригинальныхъ кристалловъ я вернусь ниже — въ главѣ о двойникахъ. Можетъ быть сюда же относятся такъ назыв. энантіоморфные двойники.

Каковъ бы ни былъ составъ кристалла—будетъ ли онъ опредѣленнымъ химическимъ соединеніемъ или физической смѣсью — онъ вполнѣ сохраняетъ свою однородность и его структура можетъ быть всегда представлена въ видѣ пространственной рѣшетки. Существованіе такой пространственной рѣшетки для физической смѣси ясно указываетъ намъ, что она не можетъ быть просто связана съ строеніемъ молекулы твердаго тѣла, такъ какъ всякая физическая смѣсь для насъ, при современныхъ атомистическихъ воззрѣніяхъ, представляетъ болѣе сложное явленіе, чѣмъ молекула химически опредѣленнаго соединенія.

Пространственная рѣшетка кристалла служитъ яснымъ и прямымъ выраженіемъ химическаго состава тѣла, но также мало зависитъ отъ признанія за кристалломъ атомистическаго или молекулярнаго строенія, какъ и лежащее въ ея основѣ понятіе о гомологическихъ точкахъ.

74. Аморфныя тѣла. Наше представленіе о кристаллѣ не будетъ полнымъ, если мы не опредѣлимъ точно, представляетъ ли кристаллъ единственную форму физически однороднаго, химически чистаго твердаго вещества или помимо него есть другія формы твердой матеріи. Въ 1830-хъ годахъ, подъ сильнымъ вліяніемъ натурфилософскихъ отголосковъ шеллингіанства, въ науку проникла идея объ *аморфныхъ* твердыхъ веществахъ. Уже въ самомъ началѣ XIX столѣтія отдѣльные изслѣдователи, какъ Глоккеръ, Брейтгауптъ и другіе полагали, что есть вещества, напр. опалы, которыя никогда не выдѣляются въ кристаллахъ; какъ образно выражался на тогдашнемъ языкѣ Глоккеръ—есть твердыя массы изначала (ursrünglich) не кристаллическія. Въ 1833 году І. Н. Фуксъ назвалъ такія вещества аморфными тѣлами и впервые рѣзко поставилъ вопросъ объ отличіи дѣйствующихъ въ нихъ силъ по сравненію съ кристаллическими веществами. По мнѣнію Фукса (1836), есть два состоянія твердаго вещества—аморфное и кристаллическое; во многомъ это два состоянія антиподовъ («Körper» и «Gegenkörper»); переходъ одного въ другое аналогиченъ переходу полиморфныхъ веществъ. Повидимому, есть случаи, когда для нѣкоторыхъ соединеній существуетъ только аморфное состояніе. Аморфнымъ Фуксъ называлъ такое твердое тѣло, физическія свойства котораго совершенно одинаковы по всѣмъ направленіямъ, т.-е. которое обладаетъ однородностію, но не обла-

даетъ векторіальностію строенія. Эти идеи Фукса встрѣтили чрезвычайно удобную почву для распространенія; понятіе объ аморфныхъ веществахъ и самое слово распространилось чрезвычайно быстро и скоро вошло въ учебники и научное міросозерцаніе. Этому способствовали съ одной стороны натурфилософскія воззрѣнія того времени, забытая нынѣ, но во многомъ любопытная и не прошедшая безслѣдно, борьба атомистическихъ и динамическихъ взглядовъ на строеніе матеріи, которая въ 1830—1840 годахъ въ нѣкоторыхъ научныхъ кругахъ, гл. обр. Германіи, была очень оживлена. Динамисты видѣли въ аморфныхъ тѣлахъ проявленіе непрерывныхъ строеній твердаго вещества. Съ другой стороны, въ первой четверти XIX вѣка многочисленныя тщетные попытки кристаллизаціи многихъ веществъ привели къ отрицательнымъ результатамъ; химики и минералоги постоянно открывали новыя тѣла, которыя не встрѣчались въ ясно выраженныхъ кристаллическихъ многогранникахъ.

75. Однако, выводы Фукса сейчасъ же встрѣтились съ возраженіями, среди которыхъ наибольшее значеніе имѣютъ работы Франкенгейма (1835—1851). Франкенгеймъ (1835) доказалъ что многія аморфныя вещества состоятъ изъ мельчайшихъ микроскопическихъ кристалловъ, съ чѣмъ согласился (1836) и Фуксъ, назвавъ ихъ псевдо-аморфными. Для другихъ аморфныхъ веществъ Франкенгеймъ допустилъ аналогичное строеніе изъ еще болѣе мелкихъ кристаллическихъ зеренъ, не видныхъ даже въ микроскопъ. Однако, Франкенгеймъ не рѣшился отнести сюда всѣ аморфныя вещества. Для нѣкоторыхъ (напр. опаловъ, смолъ, каучука и т. д.) онъ предположилъ строеніе изъ тончайшей смѣси твердыхъ кристаллическихъ зеренъ съ жидкостью—аналогично строенію студней, сгустковъ и т. п. Съ точки зрѣнія Франкенгейма аморфныя тѣла, слѣдовательно, не являлись однородными. Работы Франкенгейма, доказавшія существованіе мельчайшихъ кристаллическихъ зеренъ въ нѣкоторыхъ веществахъ, раньше считавшихся аморфными однородными, значительно сократили количество однородныхъ «аморфныхъ» веществъ. Въ 1850-хъ годахъ, исходя изъ совершенно иныхъ идей къ тѣмъ же результатамъ пришелъ одинъ изъ выдающихся теоретиковъ-физиковъ Сенъ-Венанъ (1851 сл.). Изслѣдуя теорію упругихъ явленій въ идеально изотропныхъ твердыхъ средахъ, онъ нашелъ, что эта теорія не приложима къ явленіямъ упругости въ точно изученныхъ

аморфныхъ тѣлахъ—какъ напр. въ стеклахъ. Наблюдаемыя въ нихъ явленія упругости отвѣчаютъ не аморфному строенію стекла, а строенію его изъ мельчайшихъ кристаллическихъ зеренъ. Такъ какъ оптически стекло идеально изотропно и границы зеренъ не видны ни при какихъ увеличеніяхъ, надо думать, что величина его зеренъ очень мала, соизмѣрима съ длиной свѣтовой волны, т.-е. достигаетъ долей микроновъ. При этихъ условіяхъ границы между ними и явленія интерференціи, зависящія отъ поляризаціи свѣта, не могутъ быть видны нашимъ глазомъ.

76. Однако, ни работы Франкенгейма, ни теоретическія изысканія Сенъ-Венана не привели ни къ какимъ окончательнымъ рѣшеніямъ. Въ послѣдней предсмертной разработкѣ того же вопроса Франкенгеймъ (1869) повторялъ старыя данныя, тогда какъ кругомъ господствовало болѣе или менѣе измѣненное воззрѣніе Фукса. Причиной этого отчасти являлось то, что за вычетомъ явно неоднородныхъ аморфныхъ веществъ, несомнѣнно существовали аморфныя вещества—въ предѣлахъ нашего опыта—однородныя, къ которымъ воззрѣнія Франкенгейма и Сенъ-Венана не могли быть приложены. Этими веществами мало занимались, когда важныя работы Грэгама (Graham) (1862 сл.) о коллоидахъ дали, повидимому, ученію объ аморфныхъ тѣлахъ прочную почву. Грэгамъ доказалъ, что многія вещества, которыя неспособны кристаллизоваться, отличаются по своимъ свойствамъ и въ растворенномъ состояніи (таковы гидраты окисей кремнія, алюминія, желѣза, бѣлка, клей и т. д.). Онъ назвалъ такія тѣла *коллоидами*. Коллоиды отличаются чрезвычайно слабо выраженной способностію къ диффузіи, ихъ растворы м. б. неоднородны, а представляютъ взмученныя эмульсіи жидкихъ или твердыхъ тѣлъ. Коллоиды способны давать *студни* и этотъ процессъ во многомъ являлся аналогичнымъ процессу кристаллизаціи. Работы Грэгама оказали чрезвычайно глубокое и важное вліяніе на развитіе этого отдѣла знанія и въ началѣ имъ придали бо́льшее значеніе чѣмъ теперь, т. к. казалось, что они провели рѣзкую грань между веществами, способными и неспособными кристаллизоваться: растворы однихъ были способны къ діализу черезъ перепонки (кристаллоиды), а другихъ этою способностію не обладали (коллоиды). Открытіе осадочныхъ перепонокъ, которыя оказались непроницаемыми для нѣкоторыхъ кристаллоидовъ, ясная хотя и медленная способность

къ кристаллизаціи многихъ коллоидовъ и т. п. довольно быстро сгладили первоначально рѣзкую грань.

77. Состояніе нашихъ знаній въ это время—въ серединѣ 1870-хъ годовъ—видно изъ различныхъ разработокъ вопроса объ аморфномъ и кристаллическомъ состояніи, сдѣланныхъ независимо и почти одновременно А. Кнопомъ (1876) и Н. Н. Любавинымъ (1876). Оба изслѣдователя считаютъ аморфныя тѣла существенно отличными отъ кристаллическихъ, при чемъ Любавинъ полагаетъ, что аморфность есть одно изъ проявленій физической изомеріи. По его мнѣнію, аморфное состояніе является болѣе простымъ и болѣе активнымъ, чѣмъ кристаллическое вещество (переходъ изъ него въ кристаллическое часто совершается съ выдѣленіемъ энергіи). Главными отличіями аморфныхъ тѣлъ отъ кристаллическихъ—насколько они вытекаютъ изъ эмпирическихъ данныхъ—являются по сводкѣ Кнопа и Любавина слѣдующія: 1) аморфныя модификаціи имѣютъ меньшій удѣльный вѣсъ, чѣмъ кристаллическія (т. напр. кристаллическій Sb_2S_3...4,75, аморфн. 4,15) 2) они легче разложимы и растворимы, 3) легче плавки, 4) обладаютъ большей скрытой теплотой, 5) при ихъ превращеніи въ кристаллическое состояніе выдѣляется теплота, 6) ихъ растворы относятся къ діализу совершенно иначе, чѣмъ растворы тѣлъ кристаллическихъ, 7) они обладаютъ меньшей твердостію. Оставляя нѣкоторыя исключенія, которыя должны, вѣроятно, получить иное объясненіе, въ общемъ эти эмпирическія обобщенія сохраняютъ свою силу до сихъ поръ. Къ нимъ можно присоединить еще способность растворовъ аморфныхъ веществъ давать студни, переходъ которыхъ въ такъ называемое твердое аморфное состояніе совершенно незамѣтенъ и постепененъ. Очень часто переходъ аморфнаго «твердаго» тѣла въ жидкое до такой степени постепененъ, что оно не обладаетъ неизмѣнной точкой плавленія. Чрезвычайно характерной особенностію аморфныхъ тѣлъ является непрерывная измѣнчивость ихъ свойствъ; есть какъ бы *рядъ* различныхъ по свойствамъ аморфныхъ тѣлъ и нѣтъ въ нихъ точно и ясно опредѣленныхъ и уловимыхъ признаковъ (напр. различныя формы $AgCl$, крахмаловъ, аморфнаго угля и т. п.). Мы имѣемъ въ этихъ тѣлахъ какъ бы остановившіяся стадіи какого-то процесса постепеннаго перехода кристаллическаго тѣла въ жидкость. Причина этихъ измѣненій

можетъ только отчасти заключаться въ неполной однородности данныхъ тѣлъ.

78. Среди этихъ признаковъ наибольшее значеніе имѣютъ ясно констатированная меньшая величина удѣльнаго вѣса и тепловые эффекты, связанные съ переходомъ аморфныхъ тѣлъ въ кристаллическія (выдѣленіе тепла). Принимая теорію Франкенгейма, пришлось бы для такихъ аморфныхъ тѣлъ допустить строенія изъ зеренъ иной неизвѣстной полиморфной разности, или признать ихъ за студни съ переохлажденной жидкостію. И то и другое воззрѣніе не имѣетъ пока подъ собою достаточно прочной экспериментальной почвы.

Въ общемъ вопросъ замеръ на такомъ неопредѣленномъ рѣшеніи. Между тѣмъ, мало-по-малу накапливались данныя, которыя приводили къ другому—надо надѣяться—окончательному рѣшенію вопроса. Изслѣдованія твердыхъ веществъ, связанныя съ ихъ упругими свойствами, съ полною несомнѣнностію подтвердили выводы Сенъ-Венана. Въ этомъ отношеніи прямыя указанія даны работами Фойхта (1889—1890) и Кельвина (1889). Кельвинъ пришелъ къ заключенію, что физическія свойства твердыхъ веществъ, по скольку онѣ точно изучены, во всѣхъ случаяхъ приводятъ къ заключенію, что твердое вещество или обладаетъ векторіальностію или состоитъ изъ зеренъ такого строенія. Аморфныя тѣла или должны быть составлены изъ мельчайшихъ кристаллическихъ недѣлимыхъ или не принадлежать къ классу твердыхъ тѣлъ. Въ то же время и изслѣдованіе кристаллической структуры вещества заставило подойти къ тому же результату съ другой стороны. Теорія кристаллическаго вещества въ настоящее время (см. гл. 3) построена на самыхъ общихъ положеніяхъ, связанныхъ съ однородностію вещества; при развитіи этихъ общихъ принциповъ—среди выведенныхъ классовъ твердыхъ тѣлъ нѣтъ мѣста аморфнымъ твердымъ тѣламъ. Слѣдовательно и съ точки зрѣнія кристаллографа кристаллическое вещество является единственной формой однороднаго твердаго тѣла, однородное изотропное тѣло никогда не будетъ твердымъ веществомъ (Вернадскій 1894).

79. Къ серединѣ и къ концу 1890-хъ годовъ и среди кристаллографовъ (напр., Леманнъ 1888, Гротъ 1895) и физиковъ (Нернстъ 1901) начинаетъ все болѣе и болѣе выясняться нѣкоторое сомнѣніе въ существованіи аморфнаго твердаго вещества. Правда, оно

не высказывается ясно и опредѣленно. Наконецъ въ 1896 году начинаются работы Тамманна, которыя повидимому рѣшаютъ вопросъ съ другой стороны. Тамманнъ возвращается къ старинной идеѣ, которая не разъ высказывалась другими, но которую онъ впервые прочно подтвердилъ своими многолѣтними работами (1896—1902). Еще Фуксъ (1836) указывалъ, что по многимъ свойствамъ аморфныя тѣла можно было бы называть *жидкостями*, если бы въ этомъ заключеніи не было contradictio in adjecto. Къ этой мысли вернулся Тамманнъ, который въ рядѣ теоретическихъ и экспериментальныхъ работъ доказалъ, что нѣкоторыя аморфныя тѣла надо разсматривать, какъ жидкости съ очень большимъ внутреннимъ треніемъ, какъ переохлажденныя жидкости. Признаками такихъ аморфныхъ тѣлъ является: 1) отсутствіе скрытой теплоты плавленія (напр., селена по наблюденіямъ Гитторфа 1851), 2) совершенно постепенное измѣненіе вязкости при переходѣ аморфнаго тѣла въ жидкость, 3) постепенное измѣненіе, *безъ всякихъ скачковъ*, всѣхъ ихъ свойствъ при переходѣ нагрѣваніемъ въ жидкость, 4) подобно жидкостямъ они имѣютъ бо́льшій удѣльный объемъ и теплоемкость, чѣмъ это извѣстно для твердыхъ тѣлъ, 5) точка плавленія кристаллической разности того же тѣла всегда лежитъ выше точки размягченія аморфнаго вещества и такъ далѣе. Такихъ аморфныхъ тѣлъ относительно немного. Къ работамъ Тамманна я вернусь подробнѣе въ главѣ о полиморфизмѣ. Аморфное тѣло и жидкость представляютъ, слѣдовательно, одну и ту же *фазу* въ химическихъ равновѣсіяхъ и въ этомъ отношеніи рѣзко отдѣляются отъ различныхъ состояній твердаго кристаллическаго вещества.

80. Не вдаваясь пока ни въ какія дальнѣйшія разъясненія, т. к. къ этимъ работамъ намъ придется еще разъ вернуться въ главѣ о полиморфизмѣ, можно слѣдующимъ образомъ резюмировать современное состояніе вопроса. *Кристаллъ является единственной возможной формой однороднаго твердаго состоянія матеріи.* То, что называется аморфнымъ твердымъ тѣломъ, представляетъ или: 1) чрезвычайно тонкую смѣсь мельчайшихъ кристаллическихъ недѣлимыхъ (стекла, опалы и т. д.), или 2) тонкіе *студни*, т.-е. смѣси жидкости съ твердымъ кристаллическимъ веществомъ (напр. каучукъ) или 3) однородныя жидкости, находящіяся какъ бы въ переохлажден-

номъ состояніи, но обладающія очень большимъ коэффиціентомъ тренія (напр., бетолъ, селенъ и пр.).

Въ виду такого состоянія этого вопроса въ современной наукѣ, понятно, слѣдовательно, что кристаллъ пріобрѣтаетъ въ глазахъ изслѣдователя совершенно иное значеніе, чѣмъ это было раньше. Съ жидкостью и газами можетъ сравниваться только кристаллъ, только различныя его строенія.

81. Величина кристаллической частицы. Необходимо обратить вниманіе еще на одну область явленій. Очень часто приходится слышать и читать въ различныхъ работахъ по физикѣ, химіи и кристаллографіи, что частица твердаго тѣла чрезвычайно велика по сравненію съ газообразной и жидкой частицей того же самаго химическаго соединенія. Безъ достаточной провѣрки это убѣжденіе проникло въ настоящее время въ обычное научное міровоззрѣніе. Однако, оно зиждется не на данныхъ опыта или наблюденія, а на натурфилосовскихъ идеяхъ первой половины XIX столѣтія. Въ настоящее время здѣсь ясно намѣчается процессъ разрушенія этихъ старинныхъ, непровѣренныхъ идей и воззрѣній.

Въ дѣйствительности, величина частицы твердаго вещества—кристалла—намъ неизвѣстна. Въ послѣдніе года, съ начала 1890-хъ годовъ подъ вліяніемъ теоретическихъ работъ Нернста (1891) и Вантъ Гоффа (1890) дѣлаются многочисленныя попытки опредѣлить величину кристаллической молекулы. Попытки эти пока не дали вполнѣ опредѣленныхъ несомнѣнныхъ результатовъ. Однако, нельзя оставить безъ вниманія, что всѣ такія попытки Фокка (1897), Вюрфеля (1896) и другихъ приводятъ къ однообразному заключенію; изъ этихъ работъ вытекаетъ, что частица кристаллическаго тѣла весьма не велика, она равна величинѣ газообразной молекулы или вдвое болѣе.

Всѣ эти попытки опредѣленія относительной величины кристаллической частицы основаны на ученіи о твердыхъ растворахъ и изоморфныхъ соляхъ и я въ соотвѣтственной главѣ еще вернусь къ изложенію достигнутыхъ здѣсь результатовъ.

Необходимо только отмѣтить, что въ настоящее время нельзя уже связывать представленіе о твердомъ веществѣ съ представленіемъ о большой частицѣ. Его свойства обусловливаются не относительной величиной молекулы, а своеобразнымъ распредѣленіемъ

въ немъ гомологическихъ точекъ и различными свойствами и группировкой векторовъ въ молекулѣ. Для одной и той же величины молекулы можно представить себѣ опредѣленное количество различныхъ случаевъ такого векторіальнаго строенія. Векторіальность структуры является единственнымъ характернымъ признакомъ твердаго состоянія матеріи.

ГЛАВА III.

Явленія симметріи, ихъ законы и ихъ зависимость отъ строенія кристалла.

82. **Симметрія. Элементы симметріи.** Какъ мы видѣли (§ 60) вслѣдствіе векторіальности строенія кристалла всѣ явленія въ немъ подчиняются законамъ, выражаемымъ или многогранникомъ или другой какой-нибудь геометрической поверхностію. Поэтому для того, чтобы изучать кристаллы, необходимо оріентироваться въ общихъ законахъ, выражающихъ правильность строенія многогранниковъ или другихъ геометрическихъ поверхностей. Эта правильность называется *симметріей* [1]) многогранника или геометрической поверхности или вообще симметріей въ распредѣленіи какихъ-нибудь предметовъ или точекъ въ пространствѣ.

---

[1]) Слово *симметрія* до сихъ поръ употребляется въ различныхъ смыслахъ. Въ обычномъ языкѣ подъ симметріей или симметричностію подразумѣвается зеркальное отраженіе, частный случай *сложной симметріи*. Нѣкоторые кристаллографы (напр. П. Кюри въ 1884) употребляютъ слово „симметрія" только для обозначенія сложной симметріи, подразумѣвая то понятіе, какое здѣсь названо симметріей подъ словомъ „ordre", а простую симметрію подводя подъ частный случай „повторяемости", „répétition". Симметрія въ пониманіи геометровъ также рѣзко отличается отъ ученія о симметріи, выработаннаго кристаллографами. Лежандръ и другіе за нимъ употребляли понятіе симметріи въ смыслѣ зеркальнаго отраженія. М. Брюкнеръ (1900) называетъ симметричными многогранники, обладающіе хотя бы одною плоскостью симметріи. Особнякомъ стоитъ Жорданъ (1866), но его пониманіе также не вполнѣ отвѣчаетъ по объему тому, что называется этимъ словомъ въ кристаллографіи. Онъ принимаетъ во вниманіе главнымъ образомъ послѣдовательность и порядокъ въ распредѣленіи элементовъ многогранника, оставляя въ сторонѣ ихъ величину. Я держусь наиболѣе обычнаго пониманія этого слова въ кристаллографіи.

Очевидно, явленія и законы симметріи касаются не однихъ только кристалловъ, а всякихъ предметовъ вообще. Они изучаются *геометріей*. Намъ, однако, невозможно достигнуть научнаго представленія о кристаллѣ, не овладѣвъ общими принципами этого отдѣла геометріи. Изъ всего ученія о симметріи необходимо затѣмъ выдѣлить тѣ явленія, которыя возможны въ царствѣ кристалловъ, такъ какъ реально наблюдаемое явленіе всегда занимаетъ меньшую область, чѣмъ идеальныя созданія геометріи. Въ кристаллахъ могутъ наблюдаться относительно немногіе случаи изъ безконечнаго разнообразія явленій симметріи, предусмотрѣнныхъ теоріей. Ихъ появленіе и ихъ отсутствіе зависитъ отъ основныхъ чертъ строенія кристалла, а потому изученіе того, какія изъ теоретически возможныхъ явленій симметріи встрѣчаются въ дѣйствительности, даетъ намъ новыя точныя данныя о кристаллической структурѣ.

83. Основы ученія о симметріи древни, какъ геометрія. Безсознательное примѣненіе и исканіе правильностей въ распредѣленіи предметовъ въ пространствѣ, т. е. исканіе симметріи привело къ созданію геометріи, этой основной отрасли человѣческаго мышленія. Исканіе симметріи лежало и въ основѣ изученія очень многихъ физическихъ явленій; оно видно и въ морфологическихъ изслѣдованіяхъ біологовъ. Однако, здѣсь примѣнялись лишь самыя первоначальныя понятія симметріи, которыя были очевидны сами собою, не требовали никакой разработки и никакого опредѣленія. Таковы, напримѣръ, представленія о плоскости симметріи, т. е. о мысленной плоскости, дѣлящей наше тѣло на двѣ одинаковыя части и т. д. Ученіе о симметріи выдѣлилось какъ самостоятельный отдѣлъ геометріи только тогда, когда при изслѣдованіи кристалловъ столкнулись съ векторіальностію ихъ строенія. Первые зачатки ученія о симметріи (§ 16) замѣчаются уже у кристаллографовъ XVIII вѣка; Гаюи въ 1815 году пытался эмпирически выразить нѣкоторые ея принципы, на основаніи встрѣчавшихся въ природѣ случаевъ. Вскорѣ однако вопросъ былъ разработанъ въ общей формѣ Гесселемъ (1830) и Франкенгеймомъ (1833 сл.). Основныя теоремы симметріи находятся уже въ работѣ Гесселя; онѣ были выражены имъ въ трудной, мало понятной формѣ и не оказали вліянія на ходъ развитія мысли въ этой области. Также мало обратили онѣ на себя вниманіе и позже, когда въ 1863 году Гессель, вновь переработавъ вопросъ, привелъ

его въ болѣе стройную систему. Въ это время основные принципы ученія о симметріи были уже выражены въ блестящихъ мемуарахъ Бравэ (1849 сл.). Бравэ не исчерпалъ явленій сложной симметріи (§ 94 сл.), онъ воспользовался этимъ понятіемъ лишь отчасти, ограничиваясь необходимыми случаями для пониманія явленій кристаллографіи своего времени; но онъ окончательно установилъ кристаллографію на принципахъ симметріи. Независимо отъ него къ этимъ вопросамъ пришли около того же времени чистые геометры, особенно Мебіусъ (1849 сл.), главныя работы котораго въ этой области были изданы однако много лѣтъ позже, въ посмертномъ собраніи его сочиненій (1883—1884), и не оказали прямого вліянія на разработку ученія о симметріи. Послѣ Бравэ начался рядъ работъ кристаллографовъ, которыя тянутся непрерывно до нашего времени. Въ 1867 году А. В. Гадолинъ разрабатываетъ вопросъ съ общей точки зрѣнія исходя изъ наружной формы кристаллическихъ многогранниковъ; въ 1866—1868 гг. Жорданъ (Jordan) пытается развить принципы симметріи примѣнительно къ многогранникамъ геометріи и къ поліэдрическимъ распредѣленіямъ точекъ въ пространствѣ; въ 1876 году начинаются работы Зонке, развивающаго идеи Жордана по отношенію къ кристаллическому состоянію матеріи [1]) (1879—1896). Изъ другихъ изслѣдованій въ этой области необходимо упомянуть о трудахъ Э. Малляра переработавшаго съ точки зрѣнія идей симметріи всѣ области кристаллографіи (1877—1894), работахъ Е. С Федорова (1883 сл.), давшаго самое полное и очень своеобразное развитіе идей симметріи въ приложеніи къ многогранникамъ, многоугольникамъ, къ поліэдрическому дѣленію пространства. На основаніи изученія симметріи такихъ геометрическихъ явленій Федоровъ строитъ полную теорію кристаллическихъ строеній (§ 120). Нѣсколько позже—въ 1884 году начались работы Кюри, логически разработавшаго и продолжившаго идеи Бравэ. Исходя изъ общихъ идей симметріи П. Кюри вѣроятно глубже другихъ разработалъ основные ея принципы—онъ впервые связалъ съ симметріей многогранниковъ симметрію другихъ геометрическихъ поверхностей, введя понятіе объ осяхъ безразличнаго порядка (§ 100) и выдѣливъ сим-

---

[1]) Первыя работы Зонке въ этой области были сдѣланы еще въ 1867 году до выхода главныхъ мемуаровъ Жордана.

метріи конечныхъ и безконечныхъ срединъ. Въ болѣе поздней работѣ (1894) Кюри разработалъ ученіе о симметріи въ примѣненіи къ другимъ областямъ физики и указалъ на любопытныя и важныя стороны вопросовъ, которыя открываются при такой разработкѣ физическихъ явленій. Наконецъ, въ 1890-хъ же годахъ ученіе о симметріи было развито и съ чисто математической точки зрѣнія, главнымъ образомъ въ работахъ Шенфлисса (1891). Въ послѣдніе года появились многочисленныя изслѣдованія въ области ученія о симметріи, главнымъ образомъ въ примѣненіи къ кристаллографіи, въ трудахъ Миннигеродэ (1884 сл.), Барлоу (1892 сл.), Ю. В. Вульфа (1894 сл.), Віола (1897 сл.) и многихъ другихъ [1]). Соединенными усиліями этихъ лицъ ученіе о симметріи въ настоящее время достигло значительнаго развитія и теорія сильно опередила наблюденіе. Я коснусь здѣсь только началъ этого ученія постольку, поскольку это необходимо для пониманія наблюдаемыхъ въ природѣ правильностей.

84. Для выясненія симметріи обратимся къ тѣмъ геометрическимъ фигурамъ, которыя чрезвычайно характерны для физическихъ свойствъ кристалловъ — къ многогранникамъ. Такіе поліэдры получаются напримѣръ при ударѣ (§ 50). Всѣ эти многогранники ограничены равными, гладкими плоскостями и не имѣютъ входящихъ угловъ. Если мы возьмемъ многогранникъ геометріи, отвѣчающій этимъ условіямъ, то мы въ немъ можемъ отличить отдѣльныя части наружныхъ его контуровъ, которыя получаютъ различныя наименованія. Эти части называются *элементами многогранника*. Можно различить слѣдующіе элементы многогранника: 1) *Грани* или *плоскости*, ограничивающіе многогранникъ, напримѣръ ABC (рис. 6). Въ этихъ граняхъ мы должны отмѣчать ихъ форму и ихъ размѣры, напримѣръ треугольники, какъ ABC, четырехугольники, ромбы, пентагоны и т. д. Другимъ элементомъ являются 2) *углы* или *вершины* многогранника, т. е. точки его, въ которыхъ пересѣкаются три и больше его плоскостей, напр. (рис. 6) точки A, B, C и т. д. Кромѣ граней и угловъ необходимо отличать 3) *ребра* многогранника — линіи, въ которыхъ пересѣкаются двѣ его плоскости, напр. AB, AC, BC и т. д.

---

[1]) Литература вопроса изложена въ примѣчаніи къ параграфу, въ концѣ книги.

Этимъ, однако, не исчерпываются элементы многогранника. Необходимо принять во вниманіе еще одно условіе ихъ формы, которое имѣетъ наибольшее значеніе въ кристаллографіи — взаимный наклонъ его плоскостей или такъ называемые *гранные углы*. Для того, чтобы измѣрить гранный уголъ между двумя плоскостями, наприм. ABC и ACD, необходимо провести плоскость, перпендикулярную ихъ ребру (AC) и измѣрить плоскій уголъ, который получится на этой плоскости.

Итакъ, мы имѣемъ слѣдующіе элементы многогранника: грани, углы, ребра, гранные углы.

85. Обозначивъ такимъ образомъ элементы многогранника, можно изучить его симметрію. Она выражается въ *повторяемости* нѣкоторыхъ опредѣленныхъ элементовъ въ многогранникѣ. Можно видѣть напр., что въ многогранникѣ, называемомъ *октаэдромъ* (рис. 6)— восемь разъ повторяются треугольныя грани, при чемъ по формѣ онѣ представляютъ равносторонніе треугольники. Въ то же время въ немъ 12 разъ повторяются ребра, величина которыхъ равна сторонѣ этого треугольника. Въ немъ сверхъ того 6 разъ повторяются углы или вершины, въ которыхъ сходятся подъ одинаковымъ наклономъ по четыре плоскости. Наконецъ, въ немъ будутъ повторяться и гранные углы, наприм. въ ребрахъ AB, BC и т. д., которые при измѣреніи равны $108^\circ 21'$. Очевидно, такихъ гранныхъ угловъ въ октаэдрѣ будетъ 12 и т. д.

Такимъ образомъ, симметрія многогранника выражается въ повторяемости одинаковыхъ по формѣ, размѣрамъ и величинѣ его однозначныхъ элементовъ. Если мы станемъ изучать такую правильность въ повторяемости этихъ элементовъ въ пространствѣ—мы тѣмъ самымъ выясним симметрію многогранника.

86. Такая повторяемость элементовъ многогранника можетъ быть наблюдаема различнымъ образомъ. Остановимся сперва на явленіяхъ, связанныхъ съ *вращеніемъ* многогранника вокругъ какой-нибудь его линіи. Напр., въ октаэдрѣ (рис. 6), вращая его вокругъ оси AF, мы замѣтимъ, что всѣ однородные элементы повторятся въ пространствѣ *четыре* раза—такъ четыре раза повторится грань аналогичная по формѣ, размѣрамъ и положенію въ пространствѣ грани ABC (т. е. ACD, ADE, AEB), четыре раза повторится и уголъ, аналогичный углу B (т. е. C, E, D), четыре раза повторятся всѣ ребра и т. д. Эта

правильность въ распредѣленіи предметовъ, наблюдаемая путемъ вращенія вокругъ нѣкоторой линіи (оси), можетъ быть выражена такъ: при вращеніи многогранника вокругъ данной всѣ его одинаковые элементы совмѣщаются другъ съ другомъ четыре раза. Такая симметрія называется *простой симметріей*, а линія вокругъ которой происходитъ вращеніе въ строеніи тѣла *осью простой симметріи*.

87. Однако далеко не вся правильность въ повторяемости элементовъ многогранника можетъ быть замѣчена этимъ путемъ. Есть случаи, когда ни при какомъ вращеніи, какую бы линію мы ни взяли за ось вращенія мы не получимъ совмѣщенія—а между тѣмъ элементы тѣла явно повторяются въ пространствѣ съ извѣстной правильностію. Таковъ, напримѣръ, случай, который наблюдается въ симметріи нашего тѣла, напримѣръ въ повторяемости частей правой и лѣвой руки. Очевидно, ни при какихъ условіяхъ, никогда, вращая правую руку вокругъ какой-нибудь линіи мы не можемъ поставить ее въ положеніе строго параллельное лѣвой, т. е. никогда не можемъ совмѣстить эти руки путемъ вращенія. Но если мы *отразимъ* лѣвую руку въ зеркалѣ, то мы легко приведемъ вращеніемъ правую руку въ положеніе, параллельное съ зеркальнымъ изображеніемъ лѣвой, т. е. мысленно можемъ совмѣстить вращеніемъ правую руку съ зеркальнымъ изображеніемъ лѣвой. Такая симметрія называется *зеркальной симметріей*. Эта симметрія есть частный случай (§ 88) болѣе общаго явленія, которое мы назовемъ *сложной симметріей*, а линія, перпендикулярная зеркалу будетъ носить названіе *оси сложной симметріи*. Сложная симметрія отличается отъ простой тѣмъ, что въ ней *всегда* есть зеркальное отраженіе, связанное или не связанное съ вращеніемъ вокругъ оси сложной симметріи (§ 94 сл.).

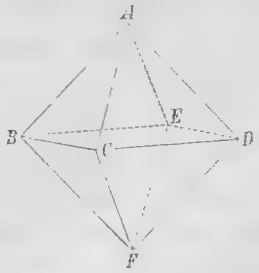


Рис. 6.

Совершенно такой же случай сложной симметріи мы имѣемъ и въ многогранникахъ, напр. въ октаэдрѣ (рис. 6). Здѣсь плоскость $BCDE$ является зеркаломъ и повторяемость элементовъ поліэдра обусловливается тѣмъ, что верхняя его часть (т. е. $ABCDE$) является зеркальнымъ отраженіемъ нижней его части (т. е. $FBCDE$) или наоборотъ. Если

мы отразимъ въ зеркалѣ $BCDE$ эту верхнюю или нижнюю часть, то ихъ заркальныя изображенія совмѣстятся (совпадутъ) съ реально существующими элементами многогранника. Мы говоримъ, что такой многогранникъ обладаетъ сложной симметріей и линія AF будетъ осью сложной симметріи.

88. Всѣ наши дальнѣйшія заключенія зависятъ, однако, еще отъ увѣренности, что никакихъ другихъ случаевъ симметріи, кромѣ простой и сложной въ кристаллическихъ многогранникахъ быть не можетъ. Повторяемость какихъ-нибудь предметовъ въ пространствѣ можно наблюдать или 1) путемъ движенія даннаго тѣла въ пространствѣ, при чемъ благодаря этому выясняется, какіе его элементы и какъ часто повторяются въ тѣлѣ или 2) путемъ зеркальнаго отраженія. Никакіе другіе пріемы наблюденія (исчисленія) повторяемости въ распредѣленіи предметовъ въ пространствѣ немыслимы. Сложная симметрія отвѣчаетъ вполнѣ второму способу наблюденія повторяемости одинаковыхъ предметовъ или элементовъ тѣла, но простая симметрія связана только съ однимъ случаемъ передвиженія тѣла, съ вращеніемъ вокругъ оси. Однако возможны и другіе случаи движенія. Въ механикѣ доказывается, что всякое движеніе можетъ быть сведено къ винтовому, которое представляетъ общій случай движеній. Необходимо убѣдиться, что въ кристаллическихъ многогранникахъ возможно проявленіе симметріи только путемъ вращенія. При изученіи повторяемости элементовъ многогранника мы должны производить какое нибудь движеніе, лишь для того, чтобы *исчислить* всѣ одинаковые элементы многогранника. При этомъ мы исходимъ изъ какого нибудь элемента многогранника и по окончаніи движенія должны вернуться къ исходному элементу, ибо кристаллическій многогранникъ есть фигура конечная, замкнутая и для опредѣленія его симметріи мы должны исчислить *всѣ* его элементы. Общій же случай движенія—винтовое, какъ извѣстно, состоитъ изъ сложенія: a) вращенія тѣла вокругъ какой-нибудь оси на уголъ α и b) одновременнаго переноса въ пространствѣ данной оси по какому-нибудь направленію на разстояніе a. Очевидно при изученіи повторяемости элементовъ многогранника, переносъ оси въ пространствѣ, т. е. величина a должна быть равна нулю: иначе по окончаніи операціи мы не вернулись бы къ исходному элементу многогранника. Поэтому при данныхъ условіяхъ винтовое движеніе превратится во вращательное и

только одно это движеніе мы можемъ принимать во вниманіе при изученіи симметріи многогранника. Очевидно, это относится и къ сложной симметріи въ кристаллахъ; и здѣсь съ зеркальнымъ отраженіемъ можетъ комбинироваться только вращеніе.

Такимъ образомъ *для многогранниковъ возможны только два вида симметріи:* 1) *симметрія вращенія (простая)* и 2) *симметрія зеркальная*, связанная съ вращеніемъ *(сложная)* [1]).

89. Этотъ выводъ имѣетъ для насъ большое значеніе въ дальнѣйшемъ изложеніи, такъ какъ въ исходныхъ положеніяхъ теоріи строенія кристалла мы предположили его размѣры *конечными*, т. е. свели его симметрію на изученіе многогранника. Такое сведеніе явилось слѣдствіемъ опыта и наблюденія, т. е. только этимъ путемъ мы нашли, что кристаллъ даетъ многогранники при полученіи въ немъ нѣкоторыхъ физическихъ явленій (§ 54 сл.). Очевидно, если бы мы имѣли дѣло съ безграничными—по размѣрамъ — срединами, для нихъ явилась бы мыслимой и симметрія съ винтовыми осями симметріи — т. е. повторяемость наблюдалась бы и при перемѣщеніи оси вращенія въ пространствѣ. Очевидно, такія системы тѣлъ не обладали бы вполнѣ однородностію строенія. Такого рода симметрія возможна въ нѣкоторыхъ физическихъ явленіяхъ.

90. Начнемъ наше изученіе съ *простой симметріи.* Первый вопросъ, который является у насъ, заключается въ томъ, какія могутъ наблюдаться оси простой симметріи?

Для того, чтобы оріентироваться въ этомъ явленіи введемъ терминъ—*порядка оси симметріи* [2]). Будемъ во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи обозначать ось простой симметріи буквой L. При этой буквѣ, станемъ писать нѣкоторый показатель n, который будетъ обозначать порядокъ оси, напр. L^n—ось n-го порядка, L^2—ось сим-

---

[1]) Въ это опредѣленіе сложной симметріи входитъ и простое зеркальное отраженіе, причемъ вращеніе вокругъ оси сложной симметріи (перпендикуляра къ зеркалу) равно 360°.

[2]) Нѣкоторые русскіе кристаллографы вводятъ другія обозначенія осей. Федоровъ (1891) называетъ порядокъ оси ея наименованіемъ. Оси называются *двойными*, *тройными* и т. д. въ зависимости отъ повторяемости элементовъ тѣла при вращеніи. Тотъ же терминъ введенъ Ф. Ю. Левинсонъ-Лессингомъ въ его переводѣ кристаллографіи Грота (1896). Сохраненіе понятія Бравэ (порядокъ оси) имѣетъ однако большія удобства для вывода нѣкоторыхъ теоремъ.

метріи 2-го порядка и т. д. Этотъ показатель обозначаетъ, *сколько разъ* при полномъ оборотѣ вокругъ L (т. е. при поворотѣ на 360°) повторяется данный элементъ многогранника [1]). Уголъ поворота вокругъ оси мы, очевидно, узнаемъ, если раздѣлимъ 360° на n, такъ напримѣръ:

L^n	даетъ	уголъ	поворота	$\frac{360^\circ}{n}$
L^2	»	»	»	180°
L^3	»	»	»	120° и т. д.

Очевидно въ многогранникахъ геометріи n въ L^n можетъ быть любымъ числомъ и можно представить себѣ оси симметріи безконечнаго множества порядковъ. Такъ напр. если мы представимъ себѣ, что въ точкѣ F сойдется n плоскостей подъ одинаковымъ угломъ къ линіи AF (рис. 7) и если мы проведемъ плоскость перпендикулярную AF, то получимъ многогранникъ, ограниченный $n+1$ плоскостью. Въ этомъ многогранникѣ AF будетъ L^n. Если въ F сойдется 5 плоскостей,—AF будетъ L^5, если 12—L^{12} и т. д.

Рис. 7.

91. Совершенно другое явленіе будетъ наблюдаться въ тѣхъ многогранникахъ, которые могутъ встрѣчаться въ царствѣ кристалловъ. *Здѣсь порядокъ возможныхъ осей симметріи очень ограниченъ.* Основная, относящаяся сюда теорема была впервые доказана Гесселемъ (1830) и независимо отъ него Франкенгеймомъ (1833). Эту теорему можно выразить такъ: *Въ кристаллическихъ многогранникахъ могутъ существовать только оси простой симметріи 1, 2, 3, 4 и 6 порядковъ.*

Тѣ оси простой симметріи, которыя могутъ встрѣчаться въ кристаллѣ, называются *элементами простой симметріи.* Теорема Гесселя-Франкенгейма можетъ быть слѣдовательно выражена такъ: Въ кристаллахъ возможны только слѣдующіе элементы простой симметріи: L^1, L^2, L^3, L^4 и L^6.

Доказательство этой теоремы можетъ быть выведено, исходя изъ основныхъ свойствъ кристалловъ. Если мы допустимъ существова-

[1]) Очевидно изъ самаго опредѣленія *порядка*, что n будетъ цѣлымъ числомъ.

ніе въ кристаллѣ оси симметріи порядка выше 6-го или ось симметріи 5-го порядка, мы неизбѣжно впадемъ въ противорѣчіе 1) съ однородностію кристаллическаго многогранника и 2) съ принципами неуничтожаемости вещества.

92. Для вывода этой теоремы докажемъ сперва, что *въ кристаллѣ невозможны оси симметріи порядка выше 6-го.*

Мы видѣли (§ 64), что кристаллъ можно опредѣлить какъ собраніе гомологическихъ точекъ; слѣдовательно въ кристаллѣ могутъ находиться только такіе элементы симметріи, которые не противорѣчатъ такому его строенію. Строеніе кристалла изъ гомологическихъ точекъ не есть гипотетическое допущеніе, а есть простое символическое выраженіе его однородности и векторіальности (§ 66). Кристаллическій многогранникъ можетъ обладать только такой формой, которая отвѣчаетъ векторіальности кристалла (т.-е. его строенію изъ гомологическихъ точекъ), а потому, разъ только мы докажемъ невозможность тѣхъ или иныхъ элементовъ симметріи для системъ гомологическихъ точекъ, тѣмъ самымъ мы докажемъ ихъ отсутствіе и въ кристаллическомъ многогранникѣ, который составленъ изъ гомологическихъ точекъ. Совершенно ясно, что всякій элементъ симметріи, существующій въ кристаллическомъ многогранникѣ, долженъ находиться и въ системѣ гомологическихъ точекъ. Всякая ось симметріи въ многогранникѣ будетъ проходить черезъ гомологическую точку, т.-е. существовать и для гомологическихъ точекъ.

Возьмемъ двѣ *ближайшія* для даннаго вещества гомологическія точки A_2 и A_1 (рис. 8). Разстояніе между ними выразится $A_1 A_2 = a$. Это разстояніе представляетъ наименьшее мыслимое разстояніе между однородными точками въ данномъ кристаллическомъ веществѣ.

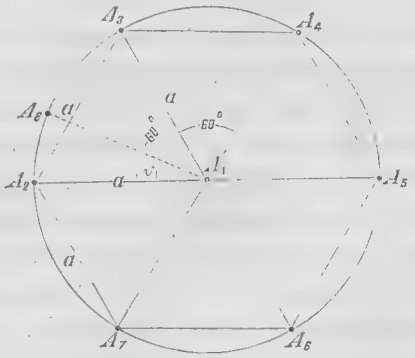


Рис. 8.

Представимъ себѣ въ A_1 ось симметріи 6-го порядка, въ такомъ случаѣ одинаковыя съ ней и съ A_2 точки будутъ расположены черезъ 60^0 на окружности круга $A_3\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7$, описаннаго радіусомъ $A_1\ A_2$. Эти точки образуютъ вершины правильнаго, вписаннаго въ

окружность, шестиугольника $A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$. Стороны такого шестиугольника по извѣстной теоремѣ геометріи, равны радіусу круга —т.-е. a; другими словами точки A_3 и A_7 лежатъ по отношенію къ A_2 на томъ же ближайшемъ разстояніи, какъ и A_1. Очевидно внутри, описанной вокругъ A_1, окружности не можетъ быть никакихъ гомологическихъ точекъ, такъ какъ тогда бы онѣ оказались на разстояніи болѣе близкомъ къ A_1, чѣмъ a, что противорѣчитъ заданію; точно также и на окружности не можетъ быть точки болѣе близкой къ A_2, чѣмъ A_3 и A_7. Положимъ въ A_1 выходитъ, какая нибудь ось симметріи порядка выше 6-го. Очевидно, она должна дѣлать уголъ меньшій чѣмъ 60^0, нпр. ϑ. Въ такомъ случаѣ при поворотѣ на $\frac{360}{\vartheta}$, гдѣ $\vartheta > 6$, точка A_8 должна приблизиться къ A_2 на разстояніе меньшее, чѣмъ a (такъ какъ хорда $A_2 A_8 < A_2 A_3$ $(=a)$. Это противорѣчитъ условію, т.-е. *допущеніе существованія оси симметріи порядка выше 6-го приводитъ къ заключенію, что двѣ точки приблизятся на разстояніе безконечно малое (меньшее любаго мыслимаго), что съ физической точки зрѣнія недопустимо.* (Ср. § 62).

Другими словами, въ молекулярныхъ системахъ немыслимы и невозможны законы, которые выразятся многогранниками съ осями симметріи порядка выше 6-го.

93. Послѣ исключенія осей симметріи выше 6-го остаются только слѣдующіе элементы простой симметріи—L^1, L^2, L^3, L^4, L^5 и L^6. Отмѣчать L^1 особымъ названіемъ нѣтъ никакой необходимости, такъ какъ всякая линія въ нашемъ пространствѣ обладаетъ свойствами оси простой симметріи 1-го порядка.

Изъ остающихся осей симметріи—*ось симметріи 5-го порядка невозможна въ кристаллическихъ многогранникахъ*, т. к. они состоятъ изъ гомологическихъ точекъ. Доказательство этого положенія основывается на томъ же, на чемъ основано и доказательство невозможности существованія оси симметріи порядка выше 6-го. При допущеніи такой оси двѣ гомологическія точки могутъ приблизиться на безконечно близкое разстояніе, т.-е. пришлось бы допустить, что вещество можетъ исчезнуть (§ 62).

Разсмотримъ ближе этотъ случай для L^5. Представимъ себѣ (рис. 9), что $A_1 A_2$ есть наименьшее возможное разстояніе между двумя одинаковыми точками, равное a. Въ такомъ случаѣ, если въ A_1

выходитъ L^5, то на окружности, описанной вокругъ A_1 радіусомъ a, расположится 5 точекъ, обладающихъ одинаковыми съ A_1 свойствами. Внутри этой окружности не можетъ находиться ни одной такой точки, такъ какъ иначе онѣ окажутся ближе къ A_1, чѣмъ возможныя *ближайшія* къ ней точки, что̀ противорѣчитъ условію. Такъ какъ всѣ эти точки A_2, A_3, A_4 и т. д. идентичны по условію съ A_1 то и въ нихъ будутъ выходить L^5. Проведемъ тѣмъ же радіусомъ окружность вокругъ A_4 — очевидно и здѣсь всѣ точки расположатся на окружности и ни одна изъ нихъ не можетъ приблизиться къ A_4 ближе, чѣмъ на радіусъ этой окружности. Если мы проведемъ точки соотвѣтствующія L^5, находящейся въ точкѣ A_3, то, очевидно, одна изъ точекъ, напр. A_8, попадетъ внутрь окружности, описанной радіусомъ, равнымъ a, вокругъ A_4, т.-е. приблизится къ ней на разстояніе болѣе близкое, чѣмъ a, что противорѣчитъ условію. Ничего подобнаго не будетъ для системъ точекъ съ L^4 (рис. 10), L^6 (рис. 11) и т. д. (ср. § 141).

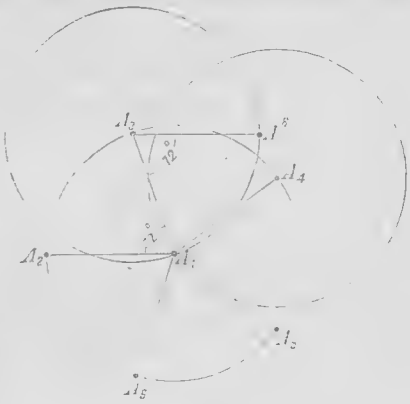


Рис. 9.

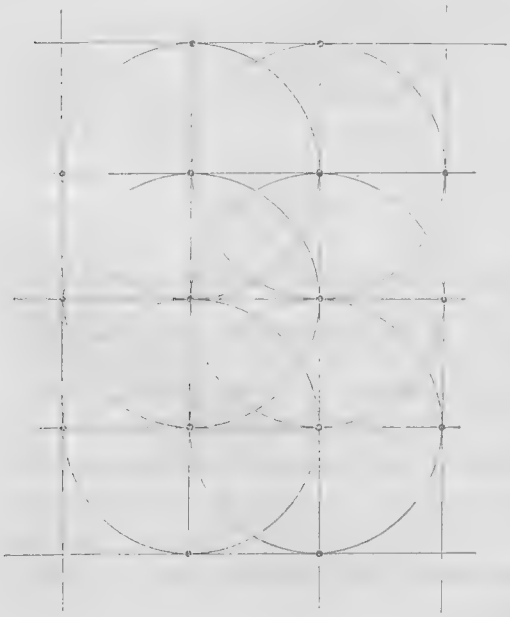


Рис. 10.

Итакъ, *въ кристаллахъ могутъ существовать только оси простой симметріи 2, 3, 4 и 6-го порядковъ.*

94. Эта теорема цѣликомъ выдерживается и для элементовъ *сложной симметріи.* Въ сложной симметріи мы имѣемъ только одинъ

элементъ симметріи—*оси сложной симметріи* (§ 87). Я буду ихъ обозначать буквой $Л$ и наверху, аналогично осямъ простой симметріи, ставить показатель n т. е. $Л^n$. Осью сложной симметріи называется

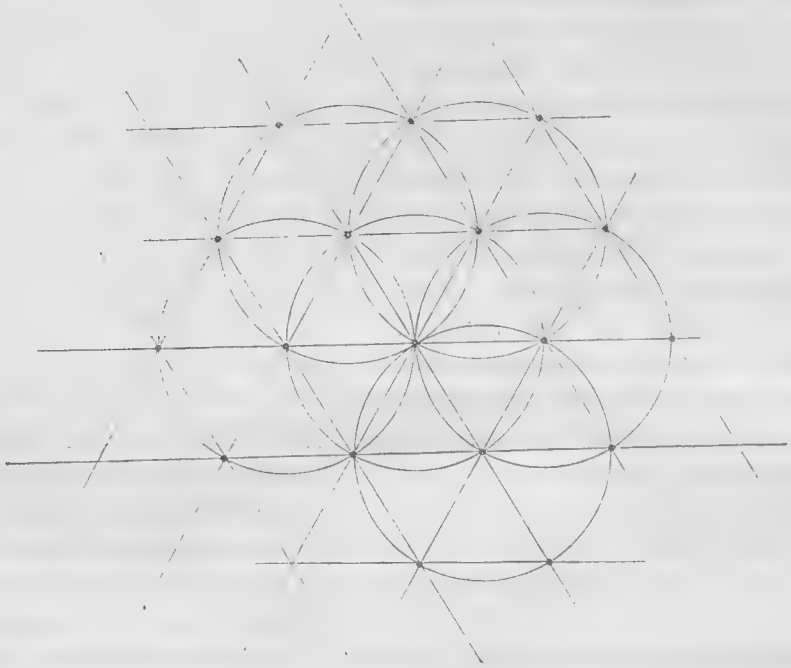


Рис. 11.

линія въ кристаллѣ, обладающая слѣдующими свойствами: если повернуть вокругъ нея кристаллъ на опредѣленный уголъ $\left(=\frac{360}{n}\right)$, то всѣ его точки придутъ въ совпаденіе съ зеркальнымъ изображеніемъ такихъ же точекъ въ зеркалѣ, перпендикулярномъ къ этой линіи. Ось сложной симметріи существуетъ въ многогранникѣ тогда, когда каждый его элементъ (§ 84) совпадаетъ съ зеркальнымъ изображеніемъ такого же элемента полученнаго путемъ отраженія отъ зеркала, перпендикулярнаго къ $Л^n$, при поворотѣ вокругъ $Л^n$ на уголъ $\frac{360}{n}$.

Очевидно и для осей сложной симметріи существуетъ таже теорема, какъ и для осей простой симметріи. Легко, во 1-хъ, доказать,

что *всякая ось сложной симметріи есть въ то же самое время ось простой симметріи вдвое меньшаго порядка*, т. е. напр. $Л^4$ въ то же время обладаетъ свойствами L^2, $Л^6$ обладаетъ свойствами L^3 и т. д.

Для доказательства этого — почти очевиднаго—положенія, сдѣлаемъ анализъ понятія оси сложной симметріи, принимая во вниманіе строеніе многогранника изъ гомологическихъ точекъ.

Возьмемъ (рис. 12) AB за ось сложной симметріи n-го порядка. Перпендикулярное къ ней зеркало p. Согласно опредѣленію $Л^n$, какая-нибудь гомологическая точка a, лежащая выше зеркала, при поворотѣ вокругъ $Л^n$ на $\frac{360^0}{n}$ должна совпасть съ зеркальнымъ изображеніемъ b', другой гомологической точки b, лежащей ниже зеркала. Это зеркальное изображеніе гомологической точки—b'—я буду называть *мнимой* [1]) гомологической точкой. Слѣдовательно существованіе $Л^n$ вызываетъ такое распредѣленіе гомологическихъ точекъ, при которомъ каждая изъ нихъ при поворотѣ вокругъ AB на $\frac{360^0}{n}$ совпадаетъ съ мнимой точкой и наоборотъ. На $\frac{360^0}{n}$ отъ b' (мнимой) — должна лежать снова гомологическая точка c, отъ нея дальше на $\frac{360}{n}$ — мнимая и т. д. Эти точки чередуются. Очевидно гомологическія точки совпадаютъ другъ съ другомъ (напр. a съ c) при поворотѣ на уголъ $\frac{360}{n:2}$, т. е. для нихъ $AB = Л^n$ есть ось простой симметріи съ угломъ поворота вдвое большимъ, т. е. порядка вдвое меньшаго.

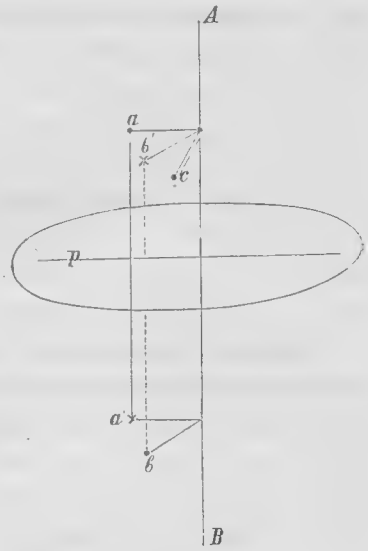


Рис. 12.

---

[1]) На рисункѣ 12 и другихъ вездѣ гомологическая точка обозначена точкой, а мнимая—крестикомъ.

95. Изъ этой теоремы ясно слѣдуетъ, что въ кристаллическихъ многогранникахъ могутъ существовать весьма немногія оси сложной симметріи. Такъ какъ, мы исходимъ изъ конечныхъ срединъ (§ 89), изъ замкнутыхъ многогранниковъ, то оси простой симметріи дробнаго порядка очевидно (§ 90) немыслимы и слѣдовательно ось сложной симметріи 3-го порядка не можетъ существовать. Ось сложной симметріи на основаніи положенія, выведеннаго въ § 94, всегда будетъ осью четнаго порядка.

Необходимо, однако, сдѣлать оговорку для $Л^1$. Такая ось можетъ существовать, ибо $Л^1$ есть въ то же время $L^{1/2}$, а $L^{1/2} = L^1$, ибо

$$\text{для } L^{1/2} \text{ уголъ поворота } \frac{360}{1/2} \text{ т. е. } \frac{2.360}{1} = 360^\circ.2$$

$$\text{» } L^1 \text{ » » } \frac{360}{1} = 360^\circ.$$

Очевидно, слѣдовательно, при допущеніи такой сложной симметріи мы всегда вернемся къ исходной точкѣ (§ 88—89). Такого возвращенія къ исходной точкѣ не будетъ, если мы примемъ существованіе $Л^3$, $Л^5$ и т. д.

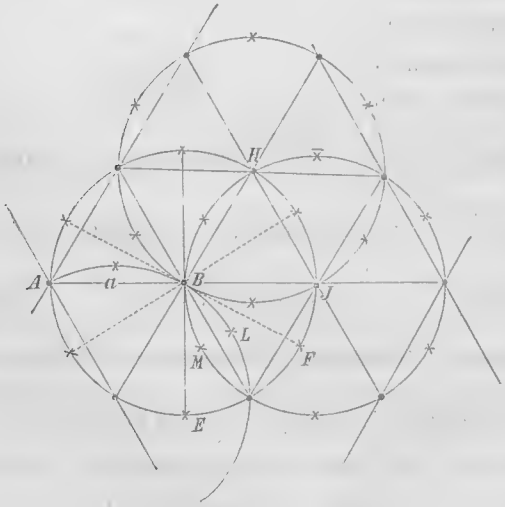


Рис. 13.

96. Комбинируя вмѣстѣ теорему Гесселя-Франкенгейма (§ 91) и только что выведенное исходное положеніе можно ждать для осей сложной симметріи существованія $Л^1$, $Л^2$, $Л^4$, $Л^6$, $Л^8$ и $Л^{12}$. Изъ этихъ осей $Л^8$ и $Л^{12}$, возможныя для геометрическихъ многогранниковъ, не могутъ наблюдаться въ кристаллическихъ поліэдрахъ. Въ этомъ легко убѣдиться, воспользовавшись тѣмъ же доказательствомъ, какое мы примѣнили къ элементамъ простой симметріи (§ 92). Представимъ себѣ (рис. 13) $Л^{12}$ и систему гомологическихъ точекъ. Въ этой

системѣ радіусъ $AB = BE = BJ = a$ будетъ представлять *наименьшее* возможное для даннаго *вещества* разстояніе между гомологическими точками. Если въ точкѣ B—$Л^{12}$ будетъ выходить перпендикулярно къ плоскости бумаги, то она вызоветъ появленіе опредѣленной системы гомологическихъ точекъ, которыя будутъ отстоять другъ отъ друга на a (такъ какъ она есть въ то же время L^6—ср. § 92—93) и между этими точками будутъ лежать *мнимыя* точки E, F и т. д., съ которыми гомологическія точки должны совпадать при поворотѣ на $\frac{360}{12} = 30^0$ вокругъ B, въ которой выходитъ $Л^{12}$. Эти мнимыя точки соотвѣтствуютъ расположенію гомологическихъ точекъ въ другой плоскости, параллельной данной, плоскости, которая лежитъ ниже зеркала, соотвѣтствующаго $Л^{12}$. Очевидно и въ этой плоскости, гомологическія точки ни въ какомъ случаѣ не могутъ приблизиться на разстояніе болѣе близкое, чѣмъ a. Если мы представимъ (по причинѣ однородности кристалла) выходъ $Л^{12}$ черезъ каждую гомологическую точку сѣти—черезъ B, H, J и т. д., то мы легко убѣдимся, что двѣ какихъ-нибудь мнимыхъ точки (eo ipso гомологическія точки въ ниже лежащей плоскости, параллельной данной) приблизятся на разстояніе меньшее, чѣмъ a, напр., E, M, L, F и т. д. Слѣдовательно $Л^{12}$ въ кристаллическихъ многогранникахъ невозможна. То же самое тѣмъ же путемъ [1]) можно доказать и для $Л^8$.

Итакъ, *въ кристаллическихъ многогранникахъ могутъ встрѣчаться только слѣдующія оси сложной симметріи:* $Л^1$, $Л^2$, $Л^4$, $Л^6$.

97. Эти оси сложной симметріи можно еще значительно сократить и придать выражаемому ими явленію другой болѣе удобный для научной работы обликъ.

Явленіе представляемое $Л^1$—есть простое зеркальное отраженіе, безъ всякаго вращенія. Поэтому, гораздо проще и удобнѣе замѣнить понятіе объ оси сложной симметріи перваго порядка понятіемъ о зеркалѣ, какъ плоскости, дѣлящей кристаллъ на двѣ совершенно одинаковыя части—изъ которыхъ каждая является зеркальнымъ изображеніемъ другой. Такую плоскость мы будемъ называть *пло-*

---

[1]) Всѣ эти выводы можно легко сообразить и инымъ путемъ. Очевидно мнимая и гомологическая точка должны въ общемъ случаѣ лежать въ разныхъ молекулахъ. Въ такомъ случаѣ для нихъ примѣнимо цѣликомъ все сказанное въ § 92.

скостью симметріи, (напр., плоскость $ABFD$ — рис. 6) и обозначать буквою P или π. Передъ этимъ обозначеніемъ будемъ писать число, которое выражаетъ *сколько* въ многогранникѣ плоскостей симметріи, напр. въ октаэдрѣ (рис. 6) $9P$, въ ромбоэдрѣ (рис. 2) $3P$ и т. д.

Можно слѣдовательно сказать, что $Л^1 = P$. Плоскость симметріи есть зеркало оси сложной симметріи 1-го порядка и эта ось лежитъ къ ней перпендикулярно.

98. Точно также очень удобно замѣнить $Л^2$ другимъ представленіемъ—представленіемъ о такъ называемомъ *центрѣ симметріи*, который я буду обозначать въ дальнѣйшемъ изложеніи буквою c. Существованіе оси сложной симметріи 2-го порядка вызываетъ очень своеобразное распредѣленіе элементовъ многогранника. Каждый элементъ многогранника имѣетъ себѣ параллельный, одноименный, одинаковый. Если какую-нибудь точку многогранника, обладающаго $Л^2$, соединить съ центромъ многогранника и продолжить эту линію по другую сторону центра, то на равномъ разстояніи эта линія встрѣтитъ такую же точку многогранника. Въ такомъ случаѣ центръ многогранника получаетъ названіе *центра симметріи* и мы говоримъ, что понятіе о существованіи въ многогранникѣ $Л^2$ можетъ быть выражено въ такой формѣ, что многогранникъ обладаетъ центромъ симметріи. Эти оба выраженія равнозначны.

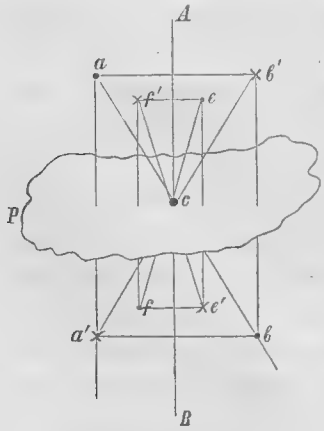


Рис. 14.

Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, необходимо разобраться въ понятіи объ осяхъ сложной симметріи 2-го порядка. Пусть (рис. 14) AB есть $Л^2$. Въ такомъ случаѣ какая-нибудь гомологическая точка a вызываетъ существованіе другой гомологической точки b, съ зеркальнымъ изображеніемъ которой (b') она совпадаетъ при вращеніи на 180^0 вокругъ AB. Очевидно при такомъ построеніи центръ многогранника—c—будетъ обладать свойствами центра симметріи, т. е. $ac = bc$. Очевидно, всякая другая линія, проходящая черезъ c, будетъ обладать тѣми же свойствами, напр., группа точекъ ef, при чемъ $ec = cf$ и т. д.

Въ концѣ концовъ вокругъ $Л^2$, очевидно, получится такое скопленіе точекъ, при которомъ *всякая* изъ проходящихъ черезъ c линій, будетъ обладать свойствами $Л^2$ и мы прійдемъ къ заключенію, что *если есть одна $Л^2$—всякая линія будетъ обладать тѣми же свойствами, т. е. что существуетъ* $\infty Л^2$. Можно выразить это такъ: $\infty Л^2 = c$. Многогранникъ, обладающій центромъ симметріи будетъ неизбѣжно состоять изъ плоскостей, изъ которыхъ каждая имѣетъ въ немъ параллельную себѣ, одинаковыхъ размѣровъ и формы плоскость.

99. Изъ всѣхъ элементовъ сложной симметріи остались еще $Л^4$ и $Л^6$. Изъ этихъ элементовъ $Л^4$ не можетъ быть сведена ни на какое понятіе, но $Л^6$, какъ легко убѣдиться въ этомъ изъ разсмотрѣнія какого-нибудь многогранника, совершенно соотвѣтствуетъ той его формѣ, которая получается при одновременномъ существованіи въ немъ центра симметріи и оси простой симметріи 3-го порядка, т. е. $Л^6 = c.\ L^3$. Поэтому, во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи мы не будемъ принимать во вниманіе этотъ элементъ симметріи, такъ какъ онъ не даетъ намъ ничего новаго.

Итакъ, въ концѣ концовъ мы имѣемъ въ кристаллическихъ многогранникахъ слѣдующіе элементы простой и сложной симметріи: L^2, L^3, L^4, L^6, c, P и $Л^4$.

100. Мы видѣли (§ 59), что кромѣ многогранника физическое явленіе въ кристаллѣ можетъ выражаться поверхностями совершенно иного характера—являться въ формѣ шара, эллипсоида и т. д. Въ этихъ случаяхъ мы встрѣчаемся иногда съ очень своеобразными осями простой симметріи, которыя не могутъ существовать въ многогранникахъ. Возьмемъ какую нибудь изъ такихъ фигуръ, напр. *шаръ*. Поворотъ вокругъ его діаметра на любой уголъ приводитъ каждую точку шара въ совпаденіе съ аналогичной ей точкой. Точно также для эллипсоида вращенія при поворотѣ его вокругъ оси вращенія на любой уголъ, каждая точка эллипсоида приходитъ въ совпаденіе съ аналогичной точкой. Очевидно каждый діаметръ шара и ось эллипсоида вращенія являются осью симметріи, поворотъ вокругъ которой на любой уголъ приводитъ тѣло въ совпаденіе само съ собою: такая ось можетъ быть названа *осью симметріи безразличнаго порядка* и обозначена символомъ L^∞.

Необходимо имѣть въ виду, что L^{∞} не можетъ существовать для всѣхъ свойствъ кристалловъ, не можетъ выражать его структуры, такъ какъ строеніе кристалла въ зависимости отъ основныхъ свойствъ матеріи допускаетъ только L^2, L^3, L^4 или L^6 (§ 91). Но она можетъ существовать для нѣкоторыхъ физическихъ явленій и обладаетъ одновременно свойствами всякой оси простой симметріи, возможной въ кристаллѣ.

101. **Связь между элементами симметріи.** Одновременное существованіе въ тѣлѣ двухъ элементовъ симметріи нерѣдко вызываетъ въ немъ появленіе бо́льшаго ихъ числа. Легко сообразить, напр., что появленіе L^2, дѣлающей какой-нибудь уголъ съ L^3, должно вызвать существованіе въ тѣлѣ, въ равномъ наклонѣ къ L^3 еще двухъ L^2, такъ какъ это вытекаетъ изъ свойствъ L^3 и т. д. Благодаря этому, какъ количество возможныхъ элементовъ симметріи одного и того же наименованія, такъ и расположеніе ихъ въ пространствѣ по отношенію другъ къ другу строго опредѣлены; въ природѣ можетъ наблюдаться немного случаевъ такого совмѣстнаго нахожденія нѣсколькихъ элементовъ симметріи въ кристаллѣ. Всѣ эти случаи, можно вывести исходя изъ опредѣленныхъ теоремъ, связывающихъ отдѣльные элементы симметріи. Всѣ эти теоремы могутъ быть доказаны очень просто—путемъ логическаго развитія тѣхъ понятій, которыя заключаются въ тѣхъ или иныхъ элементахъ симметріи.

Прежде, чѣмъ перейти къ обзору всѣхъ этихъ простыхъ теоремъ, намъ необходимо еще условиться относительно наименованія порядка осей симметріи. Ясно, напр., что L^4 есть въ то же время и L^2, такъ какъ поворотъ вокругъ нея на 180° приводитъ тѣло въ совпаденіе съ самимъ собою; L^6 обладаетъ въ одно и то же время свойствами L^2 и L^3 и т. д. Въ виду этого мы будемъ обозначать ось симметріи *наибольшимъ порядкомъ*, ей соотвѣтствующимъ, и оставимъ въ сторонѣ ея свойства, какъ оси симметріи низшаго порядка.

102. Прежде, чѣмъ идти дальше, необходимо вообще разсмотрѣть, *сколько* можетъ въ кристаллическомъ тѣлѣ существовать элементовъ симметріи одного наименованія и выдѣлить тѣ изъ нихъ, которые могутъ встрѣчаться лишь въ единственномъ числѣ. Очевидно, напр., изъ самаго опредѣленія (§ 98), что *центръ симметріи* можетъ быть только одинъ. Изъ другихъ элементовъ симметріи подобнымъ

свойствомъ обладаютъ еще L^6 и $Л^4$. Остановимся сперва на L^6 и докажемъ, что *въ кристаллѣ можетъ быть только одна ось симметріи 6-го порядка* [1]). Въ этомъ легко убѣдиться, такъ какъ если мы допустимъ, что въ тѣлѣ, будетъ n L^6, гдѣ $n>1$, то n должно быть равно ∞. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ что кромѣ данной L^6 въ тѣлѣ есть еще другая L^6, дѣлающая уголъ α съ исходной осью. Очевидно, такихъ новыхъ осей должно быть 6; вокругъ каждой изъ нихъ опять появится 6 новыхъ L^6 и т. д. Въ концѣ концовъ каждая линія въ тѣлѣ будетъ обладать свойствами L^6, т. е. векторіальность вещества исчезнетъ. Какую бы величину мы ни стали придавать углу α, никогда мы не можемъ размѣстить нѣсколько L^6 въ пространствѣ такъ, чтобы ихъ не оказалось безконечное множество и чтобы каждая линія въ тѣлѣ не получила свойства L^6.

Отсюда конечно слѣдуетъ, что L^6 не можетъ никогда находиться вмѣстѣ съ L^3 или L^4 (такъ какъ тогда появилось бы $3L^6$ или $4L^6$, что̀ невозможно). Однако L^6 можетъ комбинироваться съ L^2, но при этомъ эта послѣдняя ось должна быть перпендикулярна къ L^6 (иначе опять было бы нѣсколько L^6); точно также L^6 можетъ встрѣчаться съ плоскостями симметріи (P), но онѣ могутъ проходить только черезъ L^6 или быть ей перпендикулярны, иначе опять получится nL^6, что̀ невозможно.

103. Точно также легко понять, почему *можетъ быть только одна ось сложной симметріи 4-го порядка*. Эту теорему лучше выразить въ болѣе общей формѣ: комбинированіе $Л^4$ съ любымъ другимъ элементомъ симметріи придаетъ ей свойства простой L^4 и она теряетъ для насъ значеніе особаго физическаго признака [2]). Конечно, свойства ея, какъ $Л^4$, не будутъ потеряны, но онѣ проявятся для насъ въ иначе выражаемой, болѣе доступной и удобной для работы формѣ. Эта теорема можетъ быть выведена простымъ логическимъ разсужденіемъ, но я не буду на этомъ останавливать-

---

[1]) Само собою разумѣется, что въ системахъ гомологическихъ точекъ, въ каждой изъ нихъ выходитъ L^6, и всѣ L^6 *параллельны* между собою. Въ замкнутомъ же многогранникѣ принимается во вниманіе только линія, проходящая черезъ его центръ. Всюду въ кристаллѣ имѣетъ значеніе только *направленіе оси*. Направленія, параллельныя считаются идентичными. Это вытекаетъ изъ понятія однородности.

[2]) Аналогично тому, что всегда наблюдается для $Л^6$ (ср. § 99).

ся, такъ какъ вещества, обладающія только L^4 до сихъ поръ въ природѣ съ несомнѣнностію не встрѣчены. Намъ важно только отмѣтить, что L^4 не можетъ встрѣчаться вмѣстѣ съ другими элементами симметріи.

104. Для другихъ элементовъ симметріи—L^2, L^3, L^4 и P—мы не имѣемъ такихъ ограниченій, ихъ можетъ быть *нѣсколько*. Но число различныхъ возможныхъ случаевъ рѣзко ограничено, такъ какъ ихъ никогда не можетъ быть столько, чтобы появились какіе-нибудь новые элементы симметріи, невозможные для кристаллическихъ многогранниковъ. Для того, чтобы опредѣлить возможные случаи, остановимся сперва на взаимныхъ соотношеніяхъ элементовъ симметріи.

Изъ самаго опредѣленія симметріи ясно, что *когда* nL^2 *лежатъ въ одной плоскости, линія имъ перпендикулярная будетъ* L^n, ибо мы называемъ L^n такую линію поворотъ вокругъ которой на $\frac{360}{n}$ вызываетъ совпаденіе между собою одинаковыхъ элементовъ тѣла, въ томъ числѣ, конечно, и L^2. Такъ какъ *различныя* L^2 не параллельны (прим. § 102), то лежащія въ одной плоскости nL^2 очевидно пересѣкаются въ одной точкѣ; черезъ эту точку и пройдетъ L^n [1]).

Изъ этого положенія вытекаютъ слѣдующіе важные выводы:

1) Въ одной плоскости можетъ лежать только 2, 3, 4 или $6L^2$ и тогда мы имѣемъ комбинаціи:

$$L^2 . 2L^2$$
$$L^3 . 3L^2$$
$$L^4 . 4L^2$$
$$L^6 . 6L^2$$

2) Наименьшее количество L^2 равняется *тремъ*; онѣ очевидно, взаимно перпендикулярны. Наибольшее возможное количество осей симметріи 2-го порядка, лежащихъ въ одной плоскости, можетъ быть *6* для кристаллическихъ многогранниковъ [2]).

---

[1]) См. примѣчанія въ концѣ книги.

[2]) Въ многогранникахъ геометріи въ одной плоскости можетъ лежать любое количество L^2.

3) Углы между L^2 и другими осями симметріи строго опредѣлены; между L^2 они могутъ быть равны 90°, 60°, 45°, 30°,—а уголъ къ нимъ всѣмъ перпендикулярной оси L^n, конечно, равенъ 90°.

105. Если не всѣ L^2 лежатъ въ одной плоскости, то въ тѣлѣ должны существовать L^n, гдѣ $n > 2$ [1]). Это опять вытекаетъ съ неизбѣжностію изъ однородности строенія тѣла и изъ опредѣленія симметріи. То, что вѣрно по отношенію къ одной плоскости, вѣрно и по отношенію ко всякой другой. Слѣдовательно не можетъ быть случая, чтобы въ нѣсколькихъ плоскостяхъ находилось $6L^2$, ибо возможна всего одна L^6, которая неизбѣжно (§ 104) должна появиться перпендикулярно къ этой плоскости. Сколько случаевъ плоскостей съ $3L^2$ или $4L^2$ могутъ существовать въ кристаллѣ—зависитъ отъ того, сколько въ тѣлѣ наблюдается различныхъ комбинацій одновременнаго нахожденія L^3 или L^4.

Во всякомъ случаѣ ясно, что въ тѣлѣ не можетъ вообще находиться много L^2, такъ какъ въ одной и той же плоскости ихъ не можетъ быть больше 6, а 6 можетъ быть всего въ одной плоскости и т. д.

106. Перейдемъ теперь къ условію нахожденія въ тѣлѣ нѣсколькихъ L^4. Ясно, что уголъ между ними—α—не можетъ принять любую величину, такъ какъ иначе мы пришли бы къ представленію о безконечномъ множествѣ L^4, подобно тому, какъ это видно для L^6 (§ 102). L^4 есть одновременно L^2 и потому, когда n L^4 лежатъ въ одной плоскости, то онѣ могутъ дѣлать между собою углы только въ 90°, 60°, 30° и 45° (§ 104). Но для всѣхъ случаевъ, кромѣ 90° мы, какъ легко убѣдиться, неизбѣжно прійдемъ къ ∞ L^4, т. е. къ потерѣ тѣломъ векторіальности, что немыслимо для кристалла.

Остается, слѣдовательно, только одинъ случай, когда въ тѣлѣ есть нѣсколько L^4—именно тотъ, когда онѣ дѣлаютъ между собою уголъ въ 90°. Въ такомъ случаѣ въ одной плоскости будетъ только *двѣ* L^4, но ясно, что перпендикулярная къ нимъ (по § 104) L^2 приметъ свойства третьей L^4, ибо при поворотѣ вокругъ какой нибудь L^4 на 90° должны повторяться одинаковыя явленія, слѣдовательно, когда есть двѣ взаимноперпендикулярныхъ L^4, не-

---

[1]) Конечно, кромѣ того случая, когда есть всего $3L^2$ (§ 104).

избѣжно появится и третія, къ нимъ перпендикулярная. Это и будетъ единственный возможный случай нахожденія нѣсколькихъ L^4.

Итакъ, *въ кристаллическомъ многогранникѣ изъ n L^4 (гдѣ $n>1$) возможенъ только случай, когда $n=3$, при чемъ всѣ три L^4 взаимно-перпендикулярны.*

Можно легко сообразить, что $3\lambda^4$ не могутъ существовать не вызвавъ другихъ элементовъ симметріи и мы увидимъ, что при этомъ въ тѣлѣ всегда существуютъ $4L^3$ и $6L^2$ (§ 109).

107. Остается разсмотрѣть послѣдній случай—нѣсколькихъ осей симметріи 3-го порядка. Очевидно, уголъ между двумя такими осями не можетъ быть безразличенъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ мы пришли бы къ отрицанію векторіальности, т. е. къ ∞L^3. По самому опредѣленію L^3, количество ихъ, когда ихъ нѣсколько, не можетъ быть меньше 4, такъ какъ всякое свойство повторяется 3 раза при поворотѣ вокругъ L^3 и это должно быть вѣрно по отношенію къ каждой изъ L^3. Съ другой стороны ни въ какомъ случаѣ ихъ не можетъ быть болѣе 2-хъ въ одной плоскости; изъ понятія о симметріи кристалла вытекаетъ (§ 104), что одинаковые векторы могутъ лежать въ одной плоскости только въ количествѣ 2, 3, 4, или 6 (ибо имъ перпендикулярно должна лежать L^n, гдѣ n равно числу одинаковыхъ векторовъ въ плоскости). Ясно, что не можетъ быть $4L^3$ и $6L^3$ въ одной плоскости, такъ какъ, это противорѣчитъ теоремамъ § 104 и § 106. Точно также ихъ не можетъ быть и одновременно три въ одной плоскости, такъ какъ тогда должна появиться перпендикулярно этимъ $3L^3$ еще одна L^3, которая будетъ дѣлать иной уголъ съ этими $3L^3$, чѣмъ онѣ между собою. Двѣ же L^3 не могутъ дѣлать между собою уголъ въ 90^0, такъ какъ каждая изъ этихъ осей должна вызвать при поворотѣ вокругъ нея L^3, которыя, согласно опредѣленію L^3, должны совпадать другъ съ другомъ при поворотѣ на 120^0—а не на 90^0. При допущеніи такого строенія мы пришли бы къ ∞L^3.

Итакъ случай нахожденія $4L^3$, дѣлающихъ между собою одинаковые углы, будетъ единственнымъ, ибо при всякомъ другомъ въ одной плоскости появится больше двухъ L^3 или мы прійдемъ къ ∞L^3; оба же эти допущенія невозможны.

При условіи, чтобы эти $4L^3$ расположились въ пространствѣ при сохраненіи равенства угловъ между ними и того, чтобы никогда въ

одной плоскости не лежало ихъ больше, чѣмъ двѣ — онѣ могутъ расположиться въ пространствѣ только въ одномъ положеніи: онѣ неизбѣжно явятся діагоналями куба CD, BH и т. д. (рис. 15); углы между ними будутъ равны. При всякомъ другомъ положеніи мы прійдемъ къ другому, противорѣчащему условіямъ, количеству L^3.

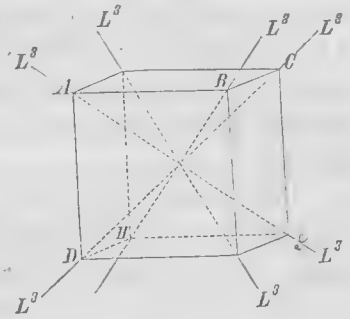


Рис. 15.

108. Такимъ образомъ въ концѣ концовъ мы приходимъ къ слѣдующимъ возможнымъ совмѣстнымъ нахожденіямъ элементовъ простой симметріи. Возможны (§ 104) системы $3L^2$, $4L^2$ L^4, $6L^2$ L^6, $3L^2$ L^3. Въ этихъ системахъ нѣкоторыя оси симметріи перпендикулярны ко всѣмъ остальнымъ; такія оси я буду во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи обозначать буквой λ. Мы имѣемъ слѣдовательно системы: $3\lambda^2$, $\lambda^4 4L^2$, $\lambda^3 3L^2$, $\lambda^6 6L^2$.

Наконецъ остались случаи $4L^3$ и $3\lambda^4$. Важно оріентироваться какіе другіе элементы простой симметріи могутъ или должны съ ними находиться совмѣстно. Разсмотримъ сперва, могутъ ли оси симметріи 2-го порядка комбинироваться съ $4L^3$ такъ, чтобы онѣ не нарушали ихъ единственно возможнаго расположенія въ пространствѣ и не вызывали никакихъ новыхъ элементовъ симметріи. Разъ у насъ въ какой нибудь плоскости лежатъ двѣ оси симметріи какого нибудь порядка и число ихъ не можетъ быть увеличено, то L^2 могутъ располагаться по отношенію къ нимъ или по линіямъ, дѣлящимъ углы между этими осями симметріи пополамъ, или перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ эти L^n. При распредѣленіи L^3, какъ указано на рис. 15, L^2 могутъ расположиться только или 1) перпендикулярно плоскостямъ куба или 2) перпендикулярно его ребрамъ. Въ первомъ случаѣ L^2, комбинируясь съ $4L^3$, не вызовутъ никакихъ новыхъ элементовъ симметріи; ясно, что онѣ дѣлятъ тупые углы между L^3 пополамъ. Ихъ, очевидно, три и согласно теоремѣ § 104 онѣ должны быть взаимно перпендикулярны. Такимъ образомъ возможна комбинація $3\lambda^2\, 4L^3$. Такія $3\lambda^2$, какъ легко сообразить, должны всегда существовать совмѣстно съ $4L^3$, расположенными по діагоналямъ куба, такъ какъ

онѣ отстоятъ на равномъ разстояніи отъ всѣхъ $4L^3$ и слѣдовательно должны совпадать другъ съ другомъ (т. е. быть идентичными, особенными векторами) при вращеніи на 120^0 вокругъ всякой изъ L^3. Эти 3 вектора взаимно перпендикулярны, слѣдовательно соотвѣтствуютъ системѣ § 104 и въ то же время дѣлятъ уголъ между всѣми $4L^3$ пополамъ, т. е. обладаютъ свойствами L^2. *Такимъ образомъ, если есть n L^3 то $n = 4$ и одновременно существуютъ $3\lambda^2$, которыя дѣлятъ тупые углы между лежащими въ одной плоскости $2L^3$, пополамъ.*

109. Остается еще другой случай распредѣленія L^2, комбинирующихся съ $4L^3$—именно тотъ, когда онѣ пересѣкаютъ острые углы между L^3 (рис. 16), или перпендикулярны къ плоскости, въ которой лежатъ $2L^3$. Легко сообразить, что эти оси однѣ и тѣ же, такъ какъ для одной пары L^3 онѣ дѣлятъ острые углы пары L^3, а въ то же время для другой тѣ же L^2 перпендикулярны къ проходящей черезъ нее плоскости. Ихъ будетъ всегда 6. Въ этомъ случаѣ существующія всегда для $4L^3$ взаимно-перпендикулярныя $3\lambda^2$ (§ 108) превратятся въ $3\lambda^4$ и къ нимъ присоединится еще $6L^2$, расположенныхъ въ указанномъ порядкѣ. Мы получимъ систему осей—$3\lambda^4$. $4L^3$. $6L^2$.

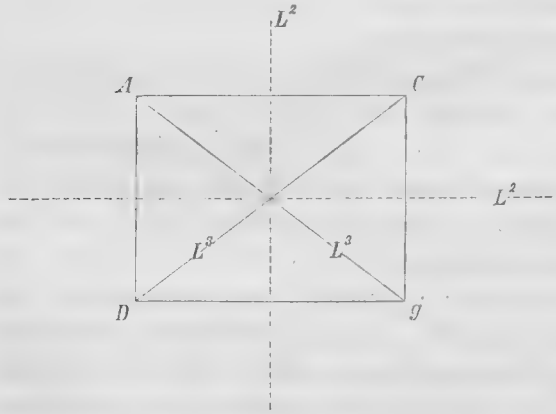


Рис. 16.

Такимъ образомъ въ этомъ второмъ, возможномъ случаѣ взаимнаго нахожденія L^3 и L^2, появляются и L^4. Очевидно, такъ какъ L^4 есть въ то же время и L^2, то никакихъ другихъ ея комбинацій съ $4L^3$ быть не можетъ, такъ какъ оси симметріи 4-го порядка всегда взаимноперпендикулярны. Очевидно и обратно, исходя изъ $3\lambda^4$, неизбѣжно связанныхъ съ $4L^3$—мы прійдемъ къ заключенію, что $3\lambda^4$ не могутъ встрѣчаться отдѣльно, но вызываютъ одновременное нахожденіе въ тѣлѣ $4L^3$ и $6L^2$.

Итакъ, *мы имѣемъ въ концѣ концовъ слѣдующіе единственно возможные случаи одновременнаго нахожденія нѣсколькихъ элементовъ простой симметріи:* $3\lambda^2$, $\lambda^4 4L^2$, $\lambda^6 6L^2$, $\lambda^3 3L^2$, $4L^3 3\lambda^2$, $4L^3 3\lambda^6 6L^2$.

110. Обратимся теперь къ комбинированію элементовъ простой симметріи съ элементами сложной. Остановимся сперва на *центрѣ симметріи. При одновременномъ нахожденіи центра симметріи и оси простой симметріи четнаго порядка неизбѣжно появляется плоскость симметріи, перпендикулярная къ оси симметріи.*

Въ этомъ легко убѣдиться, если обратить вниманіе на совмѣстное нахожденіе c и L^2, ибо всякая ось симметріи четнаго порядка есть въ то же время и L^2 (§ 101).

Пусть AB (рис. 17) есть L^2. Точка C опредѣляетъ положеніе центра симметріи. Въ такомъ случаѣ всякая гомологическая точка или всякая точка опредѣленнымъ образомъ взятая на многогранникѣ, вызоветъ совмѣстное нахожденіе съ ней еще 3 другихъ точекъ—напр., точка a вызоветъ появленіе такихъ же точекъ b, c и d. Эти точки расположатся такъ, что перпендикуляръ изъ каждой изъ нихъ, опущенный параллельно AB, на плоскость ей перпендикулярную, P, встрѣтитъ на равномъ разстояніи отъ этой плоскости такую же точку, т. е. *P будетъ плоскостью симметріи.*

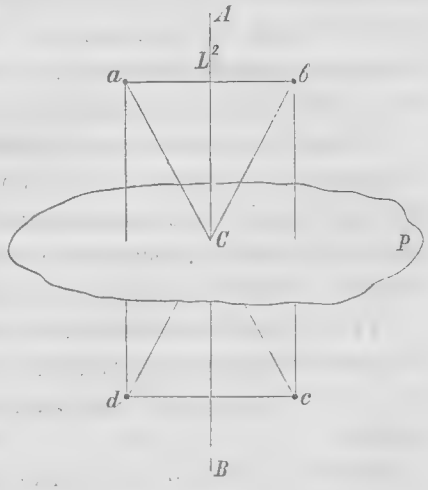


Рис. 17.

Само собою разумѣется, что эта теорема правильна и въ обратномъ случаѣ. Если есть плоскость симметріи и центръ симметріи, то линія перпендикулярная къ плоскости симметріи всегда будетъ осью симметріи четнаго порядка.

Каждая ось симметріи при существованіи въ тѣлѣ центра симметріи вызываетъ перпендикулярную къ ней плоскость симметріи и количество плоскостей симметріи опредѣляется при этомъ количествомъ осей симметріи четнаго порядка.

111. Мнѣ осталось еще разсмотрѣть послѣдній элементъ сим-

метріи — *плоскость симметріи*, въ томъ случаѣ, когда она комбинируется съ осями симметріи при отсутствіи центра симметріи.

Положеніе плоскости симметріи, очевидно, должно быть такое, которое не противорѣчило бы возможнымъ сочетаніямъ между собою осей симметріи (§§ 102 сл.). Слѣдовательно плоскость симметріи должна занимать положеніе или перпендикулярное, или параллельное (т. е. проходить черезъ ось) оси симметріи. Во всѣхъ случаяхъ, кромѣ L^2, когда появляется плоскость симметріи, перпендикулярная оси симметріи, долженъ появиться и центръ симметріи, т. е. мы прійдемъ къ многогранникамъ § 110.

Остается случай, когда P проходитъ черезъ L^n. Изъ самаго опредѣленія L^n ясно, что такихъ плоскостей всегда будетъ n, ибо при поворотѣ вокругъ L^n всякое свойство (въ томъ числѣ и P) повторяется n разъ. Слѣдовательно *если P проходитъ черезъ L^n— такихъ P будетъ въ тѣмъ n.* Очевидно, эта теорема имѣетъ и обратное значеніе: *когда въ тѣмъ n P пересѣкаются въ одной линіи, эта линія обладаетъ свойствами L^n.*

Отсюда слѣдуетъ, что 1) никогда въ кристаллическихъ многогранникахъ не можетъ быть болѣе 6 плоскостей, пересѣкающихся въ одной линіи подъ одинаковымъ угломъ; такъ могутъ пересѣкаться лишь 2, 3, 4 и 6 плоскостей симметріи и 2) углы между плоскостями симметріи могутъ имѣть только величину въ 30°, 45°, 60° и 90°.

112. Этимъ исчерпываются возможные элементы симметріи и всѣ ихъ взаимныя нахожденія. Резюмируемъ теперь въ видѣ таблицы полученныя для кристаллическихъ многогранниковъ правильности:

1. Могутъ существовать только слѣдующіе элементы симметріи: L^2, L^3, L^4, L^6, c, P, $Л^4$.
2. $Л^4$ не можетъ одновременно сочетаться ни съ какимъ другимъ элементомъ симметріи. Она обладаетъ свойствами и L^2.
3. L^6 можетъ быть только одна.
4. Когда n L^2 лежатъ въ одной плоскости и пересѣкаются подъ одинаковыми углами, то линія перпендикулярная къ этой плоскости есть L^n и обратно если есть L^n и перпендикулярная къ ней L^2, то такихъ L^2 будетъ n. При этомъ, очевидно n=2, 3, 4 или 6.
5. Когда есть n L^3, то n=1 или 4. Въ послѣднемъ случаѣ (т. е.

при $4L^3$) всегда совмѣстно находится $3\lambda^2$ [1]) (взаимноперпендикулярныхъ).

6. Когда есть n L^4, то $n=1$ или 3 и въ послѣднемъ случаѣ эти оси взаимно перпендикулярны и всегда комбинируются съ $4L^3$ и $6L^2$.
7. Когда есть c и L^{2n}, то плоскость перпендикулярная къ L^{2n} есть плоскость симметріи — P.
8. Точно также и обратно: когда есть c и P, то линія, перпендикулярная къ P есть L^{2n} (т. е. ось симметріи четнаго порядка).
9. Когда P проходитъ черезъ L^n, то въ тѣлѣ не можетъ быть одна P, а ихъ будетъ n и онѣ всѣ проходятъ черезъ L^n. Очевидно, въ этомъ случаѣ $n=2$, 3, 4 или 6.

113. **Кристаллическія строенія.** Въ концѣ концовъ, пользуясь всѣми этими выведенными изъ свойствъ симметріи соотношеніями между ея элементами, мы получимъ 32 различныхъ случая строенія многогранника. Эти случаи слѣдующіе: 1) Нѣтъ ни одного элемента симметріи. Затѣмъ семь случаевъ, въ которыхъ существуетъ только одинъ элементъ симметріи въ единственномъ числѣ: 2) L^2, 3) L^3, 4) L^4, 5) L^6, 6) L^4, 7) c и 8) P. Сверхъ этихъ восьми случаевъ во всѣхъ остальныхъ многогранникахъ мы имѣемъ одновременное нахожденіе нѣсколькихъ элементовъ симметріи, такъ семь случаевъ совмѣстнаго нахожденія только однихъ элеметовъ простой симметріи (§§ 104 сл.): 9) $3\lambda^2$, 10) λ^3 $3L^2$, 11) λ^4 $4L^2$, 12) λ^6 $6L^2$, 13) $3\lambda^2$ $4L^3$, 14) $3\lambda^4$ $4L^3$ $6L^2$ и восемнадцать случаевъ совмѣстнаго нахожденія элементовъ простой и сложной симметріи (§§ 110 сл.): 15) λ^2 c π, 16) λ^4 c π, 17) λ^6 c π, 18) λ^3 c, 19) λ^3 π, 20) λ^2 $2P$, 21) λ^3 $3P$, 22) λ^4 $4P$, 23) λ^6 $6P$, 24) $3\lambda^2$ c 3π, 25) λ^3 $3L^2$ c $3P$, 26) λ^3 π $3L'^2$ $3P'$, 27) λ^4 $4L^2$ π c $4P$, 28) λ^6 $6L^2\pi$ c $6P$, 29) λ^2 $2L'^2$ $2P'$, 30) $3\lambda^2$ $4L^3$ c 3π, 31) $3\lambda^4$ $4L^3$ $6L^2$ c 3π $6P$ и 32) $3\lambda^2$ $4L^3$ $6P$. Эти тридцать два разныхъ случая симметріи кристаллическихъ многогранниковъ мы будемъ называть *кристаллическими строеніями или классами* [2]).

---

[1]) См. § 108.

[2]) Къ сожалѣнію въ русскомъ языкѣ не установилось общаго термина для обозначенія этого понятія. Гадолинъ (1867 г.) назвалъ эти строенія *группами* симметріи, Федоровъ (1886 г.) *видами симметріи*. Послѣ выхода въ свѣтъ

114. Выводъ всѣхъ этихъ кристаллическихъ строеній ясенъ на основаніи теоремъ, изложенныхъ въ §§ 102—111.

Необходимо только отмѣтить по отношенію къ послѣдней группѣ—(строенія № 15—32)—слѣдующее. Мы получимъ эти строенія, если будемъ прибавлять элементы сложной симметріи къ строеніямъ № 1—14, символы которыхъ не оставляютъ сомнѣнія.

Такъ, прибавленіе c или P къ оси симметріи четнаго порядка вызываетъ (§ 110) появленіе въ строеніи соотвѣтствующимъ образомъ P или c; очевидно, эта теорема не касается L^3. Отсюда мы получаемъ строенія $\lambda^2\ c\ \pi$, $\lambda^4\ c\ \pi$, $\lambda^6\ c\ \pi$, $\lambda^3\ c$, $\lambda^3\ \pi$. Прибавленіе c или P къ L^4 даетъ строеніе — $\lambda^4\ c\ \pi$ (§ 103), прибавленіе какого нибудь изъ нихъ къ строенію 9-му — даетъ $3\lambda^2\ c\ 3\pi$, къ 10-му — $\lambda^3\ c\ 3L^2\ 3P$, $\lambda^3\ \pi\ 3L^2\ 3P'$ и т. д. Формула этого послѣдняго строенія—$\lambda^3\ \pi\ 3L^2\ 3P'$ требуетъ нѣкоторыхъ поясненій. Совмѣстное нахожденіе $\lambda^3\ 3P\ 3L^2$ неизбѣжно вызываетъ два положенія плоскостей симметріи (P): онѣ или должны проходить черезъ L^2 или будутъ лежать между ними; никакое другое ихъ положеніе невозможно, ибо въ противномъ случаѣ увеличится число L^2. Въ томъ случаѣ, когда P лежитъ между L^2 долженъ (по теоремѣ § 110) появиться центръ симметріи и строеніе перейдетъ въ $\lambda^3\ 3\lambda^2\ c\ 3P$ (№ 25); когда же она проходитъ черезъ L^2 получится разсматриваемое строеніе № 26.

То же самое, въ той или иной формѣ мы имѣемъ и для всѣхъ другихъ случаевъ симметріи. Разсуждая аналогичнымъ путемъ мы прійдемъ къ выше перечисленнымъ 32 кристаллическимъ строеніямъ. *Никакихъ другихъ случаевъ симметріи въ кристаллическихъ многогранникахъ быть не можетъ.*

115. Необходимо точно выяснить себѣ значеніе кристаллическихъ строеній въ теоріи твердаго вещества. Само собою разумѣется, что элементы симметріи выдерживаются для всѣхъ безъ исключенія свойствъ тѣла, представляютъ законъ распредѣленія въ простран-

---

учебника Грота (1895 г.) и особенно его русскаго перевода (Ф. Ю. Левинсонъ-Лессинга) въ жизнь вошелъ терминъ — *кристаллическій классъ*. Однако то же самое слово употребляется Федоровымъ (1901 г.) для обозначенія совершенно иного положенія (въ связи съ сингоніей). Съ 1891 г. на лекціяхъ въ Московскомъ Университетѣ я употребляю названіе *кристаллическія строенія*, которое и вошло въ жизнь нашего института.

ствѣ всѣхъ векторовъ кристалла, такъ напр, при поворотѣ на 180° вокругъ L^2 точка тѣла совпадаетъ съ идентичной съ ней точкой, какое бы физическое явленіе мы ни изучали.

Можно слѣдовательно утверждать, что ни для одного химическаго тѣла никогда не получатся многогранники, которые бы стояли внѣ этихъ 32 строеній.

Явленія такъ называемаго полиморфизма (см.) еще точнѣе выясняютъ значеніе кристаллическихъ строеній; они доказываютъ, что для одного и того же химическаго тѣла въ разныхъ интервалахъ температуры и давленія получается нѣсколько различныхъ кристаллическихъ строеній. Переходъ кристалла изъ одного строенія въ другое совершенно аналогиченъ переходу тѣла изъ жидкаго въ газообразное или твердое состояніе. Такимъ образомъ *каждое кристаллическое строеніе представляетъ опредѣленное состояніе твердаго тѣла.* Для одного и того же химическаго соединенія мы имѣемъ какъ бы 32 твердыхъ фазы, кромѣ фазы жидкой (или жидкихъ?) и газообразной.

116. Далѣе изъ свойствъ кристаллическихъ строеній ясно, что среди нихъ нѣтъ мѣста однородному твердому тѣлу, не обладающему векторіальностію строенія.

Съ геометрической точки зрѣнія это былъ бы такой случай строенія твердаго вещества, когда векторіальность его структуры не проявлялась бы *ни въ одномъ физическомъ его свойствѣ.* Это существуетъ только для *жидкостей и газовъ.* Они не обладаютъ векторіальностію, вполнѣ *изотропны.* Такая изотропность можетъ наблюдаться въ кристаллическомъ веществѣ только для нѣкоторыхъ физическихъ свойствъ, напр., въ явленіяхъ тяжести для всѣхъ кристаллическихъ строеній. Съ другой стороны въ отдѣльныхъ кристаллическихъ строеніяхъ исчезаетъ векторіальность нѣкоторыхъ физическихъ свойствъ, напр., въ строеніяхъ, принадлежащихъ къ такъ называемой правильной системѣ (§ 126) по отношенію къ свѣтовымъ, тепловымъ и т. п. явленіямъ.

Такимъ образомъ предположеніе о твердомъ состояніи матеріи, не принадлежащемъ къ 32 кристаллическимъ строеніямъ и въ то же время изотропномъ для всѣхъ физическихъ свойствъ, вполнѣ равнозначно допущенію для твердаго вещества геометрической структуры, свойственной жидкому или газообразному тѣлу.

Съ этой точки зрѣнія, единственно возможной въ кристаллогра-

фіи, такое однородное аморфное тѣло не отличимо отъ жидкости: къ тому же выводу приводятъ, какъ мы видѣли, и другія соображенія (§ 80).

117. Жидкіе кристаллы. Въ послѣдніе года, однако, выдвинулись еще явленія, которыя на первый взглядъ стремятся расширить область кристаллическихъ строеній съ другой стороны. Въ 1888 году Рейницеръ, изслѣдуя бензойнокислый холестерилъ, замѣтилъ, что это химически однородное вещество какъ бы имѣетъ двѣ точки плавленія (145.5° и 178° С); изъ нихъ при одной оно переходитъ изъ твердаго состоянія въ мутную жидкость, а при другой изъ мутной жидкости въ жидкость прозрачную. Въ то же время, изслѣдуя мельчайшія капли мутной жидкости (между 145—178°) подъ микроскопомъ, Леманнъ убѣдился, что эти капли по оптическимъ свойствамъ аналогичны сросткамъ кристалловъ (т. нз. сферокристалламъ), т. е. обладаютъ векторіальностію строенія. Оказалось, что многія другія производныя холестерила (уксуснокислый холестерилъ и др.) и гидроцератина обладаютъ аналогичными свойствами. Черезъ два года Гаттерманнъ получилъ рядъ азосоединеній, которыя еще рѣзче показываютъ тѣ же явленія. Эти вещества — *p*-Азоксифенетолъ и *p*-Азоксианизолъ были тогда же изучены Леманномъ (1890 г.). Всѣ эти вещества давали въ опредѣленныхъ интервалахъ температуръ двѣ различныхъ жидкости, изъ которыхъ одна (при болѣе высокой температурѣ) являлась изотропной, однородной, обыкновенной жидкостію, другая же рѣзко отличалась тѣмъ, что съ оптической точки зрѣнія несомнѣнно была анизотропна. Капли этой жидкости, при изученіи подъ микроскопомъ, показывали оптическія явленія свойственныя кристаллическимъ сросткамъ, сферокристалламъ. Эта анизотропная мутная жидкость была названа *кристаллической жидкостію*. Такъ, напр., *p*-азоксифенетолъ при 134.5° переходитъ въ кристаллическую жидкость, а эта послѣдняя при 165.2° даетъ обыкновенную жидкость. Съ тѣхъ поръ многочисленныя работы — Шенка (1897—1901), Квинке (1894), Абегга (1899 г.), Гулетта (1899 г.), Шнейдера (1899 — 1900 г.), Ауверса (1901 г.), самого Леманна (1890 — 1900) и др. дали намъ въ руки богатѣйшій матеріалъ для изученія физическихъ свойствъ этихъ своеобразныхъ тѣлъ. Изъ этихъ работъ съ несомнѣнностію вытекаетъ жидкій или иногда полужидкій характеръ этихъ тѣлъ въ тѣхъ интервалахъ температуръ,

при которыхъ онѣ существуютъ. Такъ ихъ внутреннее треніе аналогично (по опытамъ Шенка) внутреннему тренію обычныхъ жидкостей, напр. вязкость *p*-азоксианизола очень близка къ вязкости высшихъ алькоголей (напр., пропиловаго) и т. д. Онѣ подымаются въ капиллярахъ (Квинке), легко растворяютъ постороннія, самыя разнообразныя тѣла и при этомъ точка ихъ плавленія (переходъ въ обычную жидкость) можетъ быть значительно понижена (напр., опыты Шенбека для бензойнокислаго холестерила). Точки ихъ перехода въ обычную жидкость обладаютъ свойствами точекъ плавленія: при этихъ точкахъ мѣняются ихъ свойства — оптическія, удѣльный вѣсъ, вязкость. Эти измѣненія незамѣтны только для нѣкоторыхъ свойствъ, напр., для діэлектрическихъ константъ (наблюденія Абегга для *p*-азоксианизола), для поверхностнаго натяженія (Шенкъ). Вліяніе давленія на эту точку перехода аналогично его вліянію на точку плавленія. Такой *переходъ совершается съ тепловыми эффектами* и т. д. Всѣ эти явленія вполнѣ напоминаютъ взаимныя превращенія полиморфныхъ веществъ или переходы какого нибудь химическаго вещества изъ жидкой или газообразной фазы въ твердую или другъ въ друга.

118. Несмотря, однако, на всѣ эти факты мы встрѣчаемся здѣсь съ данными, которыя ставятъ рѣзкую границу между жидкостями, кристаллами и «кристаллическими жидкостями». Эти *кристаллическія жидкости не обладаютъ полной однородностію.* Уже, какъ замѣтилъ Леманнъ (1890 г.), капли даютъ оптическія явленія, свойственныя не цѣльнымъ кристалламъ, а кристаллическимъ сросткамъ, причемъ ихъ отдѣльныя кристаллическія недѣлимыя достигаютъ чрезвычайно малой величины. Его позднѣйшія работы (1900 г.) надъ вліяніемъ магнетизма на эти капли, надъ разнообразными ихъ деформаціями при нагрѣваніи, сдавливаніи и т. п. безусловно ясно опредѣлили ихъ физическую неоднородность, ихъ строеніе какъ бы изъ тончайшихъ пленокъ разсѣянныхъ въ массѣ, обладающей другими свойствами. Теоретическое значеніе неполной однородности такихъ капель было выдвинуто вскорѣ же послѣ открытія Леманна—Ю. В. Вульфомъ (1892 г.) и Квинке (1894 г.). Послѣдній предположилъ, что кристаллическія жидкости по строенію аналогичны жидкостямъ, въ которыхъ разсѣяно очень много мельчайшихъ, дѣйствующихъ на поляризованный свѣтъ кристалликовъ. Такія образованія полу-

чаются, напр., въ пленкахъ, какія даютъ на поверхности водные растворы олеиновокислыхъ солей, міэлиновыя пленки и т. под. Это воззрѣніе Квинке даетъ объясненіе цѣлому ряду явленій, однако характеръ точки перехода изъ кристаллической жидкости въ обыкновенную жидкость съ трудомъ можетъ быть согласованъ съ этой теоріей. Нѣкоторыя изъ такихъ кристаллическихъ жидкостей, напр., *p*-азоксианизолъ даже болѣе подвижны, чѣмъ соотвѣтствующая имъ изотропная жидкая фаза. Это непонятно съ точки зрѣнія идей Квинке. Еще меньше отвѣчаютъ факты другому воззрѣнію на кристаллическія жидкости, выдвинутому Оствальдомъ (1894 г.). По его мнѣнію, это—твердыя тѣла, находящіяся вблизи своей критической точки, при переходѣ въ жидкость. Изслѣдованія Гулетта (1899 г.) надъ дѣйствіемъ давленія на точку плавленія дали результаты, рѣшительно несогласные съ этимъ воззрѣніемъ.

119. Во всякомъ случаѣ *неоднородность капель и, слѣдовательно, всей массы кристаллической жидкости находится внѣ сомнѣній.* Леманнъ пытался объяснить ее, отнеся кристаллическія жидкости къ кристалламъ съ чрезвычайно малой вязкостью, съ малымъ внутреннимъ треніемъ. Уже подъ вліяніемъ тяготѣнія или поверхностнаго натяженія такіе кристаллы деформируются, и вмѣсто поліэдрическихъ многогранниковъ получаются шарообразныя капли. Нѣчто аналогичное мы не разъ увидимъ въ явленіяхъ кристаллизаціи (см. ниже). Однако, это предположеніе не можетъ объяснить характерныхъ оптическихъ свойствъ кристаллическихъ жидкостей: эти свойства указываютъ съ несомнѣнностію, что капли кристаллическихъ жидкостей состоятъ изъ аггрегатовъ какихъ-то мельчайшихъ тѣлецъ, обладающихъ однородностію. Такая структура можетъ получиться только при однородныхъ деформаціяхъ кристалла, при явленіяхъ скольженія и, дѣйствительно, здѣсь мы наблюдаемъ близкіе случаи при деформаціяхъ мягкихъ кристалловъ (см. главу о скольженіи).

Строеніе однородныхъ элементовъ кристаллическихъ жидкостей, тѣхъ тончайшихъ зеренъ или волоконъ, изъ которыхъ онѣ состоятъ, намъ совершенно неизвѣстно. Даже *ихъ* жидкая природа не доказана. Между тѣмъ, съ изотропною жидкостію (физически однородною) можно сравнивать только однородныя тѣла — зерна твердаго тѣла (кристаллы), газы (§ 48). Слѣдовательно, съ ней можно было

бы сравнивать только эти мельчайшіе элементы кристаллической жидкости. Въ настоящее время изучая кристаллическія жидкости, мы изслѣдуемъ лишь своеобразныя скопленія однородныхъ элементовъ, получаемъ суммарное впечатлѣніе о свойствахъ тѣла, (подобно тому, что извѣстно для аморфныхъ веществъ и кристаллическихъ сростковъ) и, очевидно, сравненіе такихъ веществъ съ однородными изотропными жидкостями или кристаллами логически невѣрно и не можетъ привести къ правильнымъ выводамъ [1]).

Это сравненіе еще менѣе возможно потому, что полная однородность—даже физическая—такихъ жидкостей недоказана и м. б.

---

[1]) Изслѣдователи, допускающіе такое сравненіе, исходятъ изъ другихъ соображеній. Такъ Леманнъ (1900 г.) вполнѣ признаетъ неоднородность изслѣдуемыхъ имъ капель, но онъ—на основаніи чисто теоретическихъ соображеній—не признаетъ однородности кристалла, и въ этомъ отношеніи его взгляды стоятъ довольно одиноко въ современной кристаллографіи. Въ своихъ работахъ онъ соединяетъ вмѣстѣ и разсматриваетъ, какъ сростки кристалловъ, такъ и отдѣльные кристаллическіе многогранники и не дѣлаетъ различія между неизбѣжной неоднородностію *кристаллическаго тѣла*, вслѣдствіе появленія на его поверхности наружнаго слоя, обладающаго иными свойствами, чѣмъ его внутренніе слои (аналогично тому, что наблюдается и для жидкости—при ея полной однородности ея поверхностный слой всегда измѣненъ) и полной однородностію *внутренняго строенія* всякаго кристалла. Съ точки зрѣнія Леманна всѣ твердыя тѣла неоднородны и онъ разсматриваетъ гл. обр. проявленія такой неоднородности, т. е. явленія, аналогичныя капиллярнымъ. Но внутреннія части кристалла по отношенію ко многимъ явленіямъ обладаютъ полной однородностію; область такихъ однородныхъ веществъ оставлена Леманномъ безъ вниманія. Другіе изслѣдователи, допускающіе самостоятельное существованіе кристаллическихъ жидкостей, напр., Баккюисъ Роозебумъ (1901 г.) настаиваютъ на однородности кристаллическихъ жидкостей, но понимаютъ однородность не въ смыслѣ совпаденія всѣхъ параллельныхъ векторовъ (§ 47), а въ томъ смыслѣ, что это субстанціи одной фазы (противуположно взглядамъ Квинке), химически чистыя, въ которыхъ есть „направляющая кристаллическая сила“ (Richtungskraft). Къ сожалѣнію, до сихъ поръ нѣтъ ни одного наблюденія надъ явленіями однородныхъ—въ кристаллографическомъ смыслѣ—элементовъ кристаллической жидкости и указанія Роозебума на однородность кристаллическихъ жидкостей не даютъ намъ права сравнивать ихъ съ кристалломъ. Самъ Роозебумъ не видитъ возможности относить ихъ къ жидкостямъ, а сближаетъ ихъ съ кристаллами, называетъ „текучими“ кристаллами, такъ какъ они рѣзко отличаются отъ всѣхъ извѣстныхъ жидкихъ полимеровъ или тавтомеровъ, такъ какъ не могутъ однородно смѣшиваться съ своей жидкой фазой.

здѣсь, въ этихъ мутныхъ срединахъ мы имѣемъ смѣси разныхъ веществъ, аналогичныя тончайшимъ эмульсіямъ.

Какъ бы ни рѣшился этотъ послѣдній вопросъ, неоднородность строенія «кристаллическихъ жидкостей» съ точки зрѣнія векторіальныхъ свойствъ—несомнѣнна. Но каково строеніе ихъ мельчайшихъ кристаллическихъ элементовъ? Представляютъ ли они вполнѣ твердые кристаллики или жидкія волокна анизотропнаго строенія? Это для насъ до сихъ поръ полная загадка, такъ какъ пока не удалось ихъ выдѣлить, вырастить или получить въ значительныхъ размѣрахъ. Но какъ бы ни рѣшился этотъ вопросъ — они во всякомъ случаѣ должны найти мѣсто среди тѣхъ 32 кристаллическихъ строеній, которыя разсмотрѣны въ предыдущихъ параграфахъ, ибо эти кристаллическія строенія выведены изъ общихъ принциповъ, которые неизбѣжно существуютъ и для мельчайшихъ частей однородной жидкости. Если дальнѣйшія изслѣдованія укажутъ, что эти видимые элементы кристаллическихъ жидкостей тверды — они будутъ отнесены къ кристалламъ, измѣненнымъ благодаря скольженію (см. ниже), очень легко происходящему, по разнообразнымъ направленіямъ. Если же эти элементы окажутся жидкими—прійдется расширить понятіе о кристаллическомъ состояніи матеріи и не считать его характернымъ только для твердаго тѣла. Этого послѣдняго взгляда держатся нѣкоторые изслѣдователи матеріи, напр., Б. Розебумъ (1901 г.), видящіе различіе между однороднымъ твердымъ и жидкимъ тѣломъ не въ присутствіи или отсутствіи векторіальности строенія. Но факты въ ихъ современномъ состояніи не позволяютъ дѣлать такого вывода.

120. **Кристаллическія системы.** Такимъ образомъ прилагая понятіе симметріи къ тѣламъ, обладающимъ однородностію и векторіальностію строенія, мы пришли къ 32 твердымъ *кристаллическимъ строеніямъ*, которыя соотвѣтствуютъ жидкой или газообразной фазамъ какого нибудь химическаго соединенія. Съ другой стороны, исходя изъ тѣхъ же представленій объ однородности и векторіальности тѣла, мы пришли къ геометрическому представленію о строеніи такого тѣла изъ *пространственныхъ рѣшетокъ* (§ 65). Эти пространственныя рѣшетки представляютъ какъ бы системы молекулярныхъ координатныхъ осей, повторяющіяся въ каждой точкѣ тѣла, благодаря его однородности.

Теперь пользуясь обоими этими представленіями, мы можемъ дать нѣсколько болѣе точное опредѣленіе системамъ пространственныхъ рѣшетокъ, характеризующихъ кристаллическое вещество. Эти рѣшетки должны служить координатными элементами кристалла, а безъ такихъ координатныхъ осей и плоскостей, мы не можемъ изучать геометрическія поверхности, т. е. физическія свойства кристалла. Выборъ пространственныхъ рѣшетокъ не произволенъ. *Ряды* (§ 65), строющіе кристаллическія ячейки т. е. молекулярныя координатныя оси, могутъ быть выбираемы различнымъ образомъ и, понятно, согласно общимъ принципамъ научной логики, надо выбирать ихъ такъ, чтобы они лежали наименѣе случайно или произвольно, чтобы ихъ легко было всегда находить и чтобы они позволяли выражать относимыя къ нимъ геометрическія поверхности наиболѣе просто и въ наибольшемъ соотвѣтствіи съ существующими въ тѣлѣ правильностями. Слѣдовательно плоскости, ограничивающія кристаллическую ячейку, будутъ служить для насъ координатными плоскостями, а ряды, ее образующіе—координатными осями. Въ кристаллѣ мы изучаемъ гл. обр. симметрію наблюдаемыхъ въ немъ поверхностей, которыя получаются при изслѣдованіи ихъ физическихъ свойствъ, а потому понятно, что координатные элементы и координатныя оси должны быть приведены въ строгое соотвѣтствіе съ возможными въ кристаллахъ случаями симметріи. Элементы симметріи кристалла существуютъ для всѣхъ его физическихъ свойствъ, а потому понятно, что при правильномъ выборѣ координатныхъ элементовъ надо ихъ искать среди элементовъ симметріи. При такомъ выборѣ осей, изучая физическія свойства кристалла, мы легко вновь найдемъ эти координаты, т. к. они тѣсно связаны съ его молекулярной структурой. Съ другой стороны—въ опредѣленныхъ случаяхъ—наклонъ между кристаллическими рядами, совпадающими съ элементами симметріи, будетъ совершенно неподвиженъ, независимъ отъ внѣшнихъ условій въ какихъ изучается кристаллъ. Такъ, напр., въ строеніи λ^2 с π, ось симметріи будетъ *всегда* дѣлать уголъ въ 90^0 съ плоскостію симметріи π, какъ бы мы ни нагрѣвали или охлаждали тѣло, какимъ бы деформаціямъ оно ни подвергалось въ магнитномъ или электрическомъ полѣ. Слѣдовательно, если мы возьмемъ λ^2 за одну координатную ось, и двѣ другія помѣстимъ въ π, то уголъ ея къ двумъ другимъ представитъ для даннаго тѣла абсолютно неизмѣнную ве-

личину. Ясно, какое огромное значеніе такая система неизмѣнныхъ и легко находимыхъ координатныхъ осей можетъ имѣть для правильнаго выраженія и изученія всѣхъ физическихъ свойствъ кристалла. Съ другой стороны, необходимо обратить вниманіе еще на слѣдующее: оси симметріи — простой и сложной — являются, очевидно, опредѣленными векторами кристалла. Эти векторы — въ зависимости отъ симметріи — могутъ быть различными: могутъ быть случаи когда эти векторы *идентичны*, т. е. при всѣхъ условіяхъ отвѣчающія имъ молекулярныя линіи обладаютъ одинаковыми по величинѣ и характеру свойствами. Само собою понятно, что при изученіи какихъ нибудь явленій необходимо выбирать такія координатныя оси, которыя не только занимаютъ неизмѣнное положеніе по отношенію другъ къ другу въ пространствѣ, но въ то же время сравнимы между собою. Для рѣшенія многихъ вопросовъ удобно выбирать ихъ такъ, чтобы можно было взаимно перемѣщать ихъ въ кристаллѣ и чтобы отрѣзки ихъ сохраняли постоянное отношеніе при всякихъ температурахъ, при всякихъ внѣшнихъ условіяхъ. При векторіальной структурѣ тѣла это будетъ наблюдаться только тогда, когда за координатныя оси взяты идентичные (§ 45) векторы, связанные съ симметріей.

121. Такимъ образомъ, важно строить пространственныя рѣшетки кристалла въ тѣсной зависимости отъ симметріи. Ряды, строящіе пространственныя рѣшетки, принимаются за координатныя оси, къ которымъ мы относимъ всѣ явленія, наблюдаемыя въ кристаллѣ. Очевидно количество, такимъ образомъ выбранныхъ, возможныхъ пространственныхъ рѣшетокъ очень ограничено. Для многихъ строеній мы получаемъ одинаковыя пространственныя рѣшетки, одинаковую форму строящихъ ихъ ячеекъ. На этомъ основаніи всѣ строенія распадаются на нѣсколько группъ, изъ которыхъ каждая обнимаетъ нѣсколько кристаллическихъ строеній. Эти группы называются *кристаллическими системами* [1]). Кристаллическія системы были вы-

---

[1]) Къ сожалѣнію, и этотъ терминъ въ послѣднее время началъ употребляться въ различныхъ смыслахъ. Сорэ (1892 г.) ввелъ слово *сингонія* для обозначенія чисто внѣшней симметріи *многогранника*. Какъ мы увидимъ ниже, часто такая симметрія бываетъ больше симметріи внутренняго строенія. Сорэ сталъ различать системы сингоніи и системы симметріи. Федоровъ (1897 г.) воспользо-

работаны путемъ долгой эмпирической работы, къ нимъ подошли почти ощупью. Первыя ясныя указанія на наши современныя кристаллическія системы видимъ мы въ работѣ Бернгарди (1807 г.), которая не обратила на себя вниманія (§ 17). Бернгарди выдѣлилъ всѣ тѣ 6 кристаллическихъ системъ, которыхъ и мы теперь придерживаемся. Онъ исходилъ изъ чисто геометрическихъ соображеній. Вскорѣ послѣ него къ этому вопросу вернулся, развивъ его иначе, Вейссъ (1815 г.), работавшій, повидимому, независимо отъ него. Однако все значеніе кристаллическихъ системъ было признано только послѣ работъ Моса (1819 г.) и главнымъ образомъ послѣ того, какъ Брюстеръ (1820 г.), воспользовавшись классификаціей Моса, привелъ въ связь дѣленіе на кристаллическія системы съ дѣленіемъ кристалловъ по оптическимъ свойствамъ. Мосъ не внесъ ничего новаго сравнительно съ дѣленіемъ Вейсса, но онъ приписывалъ честь открытія себѣ, и между нимъ и Вейссомъ и ихъ учениками возникла въ это время, въ 1820—1830 годахъ, горячая полемика о пріоритетѣ, въ связи съ выясненіемъ сущности кристаллическихъ системъ. Въ этой полемикѣ имя дѣйствительнаго создателя шести кристаллическихъ системъ — Бернгарди — не было произнесено, и самъ Бернгарди спокойно и безмолвно остался въ сторонѣ отъ шумной борьбы... Въ исторіи этого вопроса мы вообще наблюдаемъ много споровъ и попытокъ ввести тѣ или иныя новыя понятія и системы; медленно и постепенно черезъ десять лѣтъ, къ серединѣ 1830-хъ годовъ, выяснилось значеніе и содержаніе кристаллическихъ системъ. Въ общемъ однако мы вернулись къ системамъ, созданнымъ Бернгарди, послѣ того, какъ Науманнъ и Розе сгладили различія въ характеристикѣ Вейсса и Моса. Нѣкоторые изслѣдователи придерживаются, не 6, а 7 кристаллическихъ системъ, подраздѣляя гексагональную систему (§ 126) на двѣ—ромбоэдрическую (тригональную) и гексагональную.

122. Пользуясь идеей пространственныхъ рѣшетокъ, примемъ три ихъ ряда за координатныя оси X, Y, Z—при чемъ условимся ось

вался тѣмъ же словомъ „сингонія“ для обозначенія другого понятія—характера векторовъ внутри кристалловъ, и противупоставилъ это слово системѣ. Онъ различаетъ въ кристаллическихъ веществахъ: сингоніи и системы. При этомъ и понятіе система онъ употребляетъ въ смыслѣ отличномъ отъ того, котораго придерживается авторъ этого курса и большинство кристаллографовъ.

X обращать къ наблюдателю, Y—ставить параллельно наблюдателю, а Z—вертикально (рис. 18). Углы между координатными осями мы будемъ называть: α уголъ между осями X и Y, β — уголъ между X и Z и γ—уголъ между Y и Z.

Воспользовавшись этими терминами, мы можемъ удобно раздѣлить всѣ 32 кристаллическихъ строенія (§ 113) на ограниченное количество кристаллическихъ системъ. Для этого будемъ брать за оси X, Y и Z — оси простой симметріи, а если ихъ нѣтъ — оси сложной симметріи и только, въ случаѣ отсутствія достаточнаго количества L^n или $Л^n$, станемъ брать за координатныя оси векторы, по возможности опредѣленнымъ образомъ расположенные по отношенію къ элементамъ симметріи. Когда есть нѣсколько осей симметріи различныхъ порядковъ, будемъ принимать ось наибольшаго порядка за ось Z (кромѣ того случая, когда есть $4L^3$).

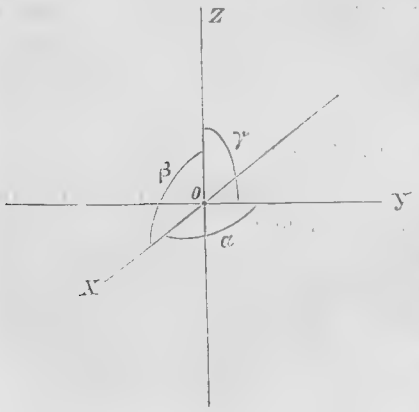


Рис. 18.

123. Пользуясь этими правилами, мы получимъ слѣдующія кристаллическія системы:

1) *Триклиническая система* [1]). Элементы симметріи не достаточны для того, чтобы дать координатнымъ осямъ опредѣленное и неизмѣнное положеніе въ кристаллѣ. Оси X, Y и Z не зависятъ отъ симметріи. Строеній, сюда относящихся, можетъ быть только два: 1) нѣтъ элементовъ симметріи и 2) с. Слѣдовательно въ триклинической системѣ ячейка имѣетъ форму косаго параллелепипеда; ея углы α, β, γ различны и векторы ея не идентичны, т.-е. ряды обладаютъ различными параметрами.

2) *Моноклиническая система* [2]). Только *одна* изъ осей можетъ занимать неизмѣнное положеніе въ пространствѣ, т.-е. она совпадаетъ съ единственной въ тѣлѣ осью простой или сложной симметріи.

---

[1]) Триклиноэдрическая.

[2]) Моноклиноэдрическая, одноклиномѣрная.

Очевидно, въ такомъ случаѣ двѣ другихъ оси могутъ быть выбраны въ тѣлѣ такъ, что онѣ будутъ лежать въ плоскости, перпендикулярной къ оси простой симметріи или въ зеркалѣ оси сложной симметріи, и это ихъ положеніе никогда не измѣнится при измѣненіи внѣшнихъ условій среды, въ которой лежитъ тѣло. Но единственныя въ кристаллѣ L^n или $Л^n$, которыя мы принимаемъ здѣсь во вниманіе, могутъ быть разнаго порядка; въ зависимости отъ ихъ симметріи могутъ быть случаи, когда двѣ координатныя оси, перпендикулярныя къ нимъ бываютъ идентичны (при $n > 2$) или различны (при $n = 2$). Мы будемъ соединять въ моноклиническую систему только такія кристаллическія строенія, въ которыхъ два какихъ нибудь вектора, перпендикулярныхъ къ третьему (L^n или $Л^n$), не могутъ быть идентичными, на основаніи симметріи. Въ моноклинической системѣ за координатную ось Y принимаютъ ось, совпадающую съ осью симметріи—λ^2 или $Л^1$. Это было сдѣлано случайно, на основаніи соображеній, потерявшихъ для насъ всякій смыслъ. Мы придерживаемся этой установки, чтобы не вводить путаницы въ научный матеріалъ, оріентированный такимъ образомъ въ теченіе почти столѣтія.

Очевидно, къ моноклинической системѣ могутъ быть отнесены только три строенія: 3) π, 4) λ^2 и 5) λ^2 *с* π. Въ этой системѣ углы $\alpha=\gamma=90^0$, а уголъ β не равенъ 90^0; всѣ векторы строящіе ячейку различны, т. е. ея параметры различны. Форма ячейки соотвѣтствуетъ параллелепипеду, въ которомъ стороны, проходящія черезъ YZ и XZ дѣлаютъ прямой уголъ, а плоскость, проходящая черезъ XY наклонена къ YZ и перпендикулярна къ XZ.

3) *Ромбическая система.* Третій возможный случай мы имѣемъ тогда, когда въ ячейкѣ $\alpha=\beta=\gamma=90^0$, т. е. когда возможно выбрать систему взаимноперпендикулярныхъ координатныхъ осей, остающуюся такой при всѣхъ условіяхъ, въ какихъ наблюдается тѣло. При этомъ векторы, взятые за координатныя оси, могутъ быть всѣ или частію идентичны или всѣ различны. Мы соединимъ въ ромбическую систему только строенія, въ которыхъ три вектора не могутъ быть идентичны.

Такими свойствами обладаютъ только три строенія: 6) $3\lambda^2$, 7) λ^2 $2P$, 8) $3\lambda^2$ *с* 3π. Форма ячейки — прямоугольный параллелипипедъ, всѣ три стороны котораго различны.

Итакъ въ три системы—ромбическую, моноклиническую и триклиническую изъ 32-хъ попали *всѣ* строенія, въ которыхъ нѣтъ осей

симметріи выше 2-го порядка, (кромѣ одного строенія $\lambda^2\ 2L\ 2P'$). Какъ мы увидимъ, эти три системы на основаніи нѣкоторыхъ другихъ признаковъ могутъ быть соединены въ одну общую группу, отличную отъ всѣхъ прочихъ кристаллическихъ тѣлъ (§ 130).

124. Во всѣхъ остальныхъ строеніяхъ имѣются или оси симметріи порядка выше 2-го или при нѣсколькихъ L^2, *одна* — λ^2— рѣзко отличается отъ прочихъ по своему положенію. Такъ, въ строеніи $\lambda^2\ 2L^2\ 2P'$, ось λ^2 перпендикулярна къ двумъ другимъ L^2 и черезъ нее проходятъ еще двѣ плоскости симметріи; между тѣмъ какъ черезъ двѣ другія L^2—плоскости симметріи не проходятъ, а лежатъ между ними, подъ одинаковымъ къ нимъ угломъ, т. е. вызываютъ ихъ полное совпаденіе при зеркальномъ отраженіи. Слѣдовательно взаимноперпендикулярные векторы, совпадающіе съ L^2 идентичны между собою, но ничѣмъ не связаны съ векторомъ, совпадающимъ съ λ^2.

Обратимся теперь къ строеніямъ, въ которыхъ имѣются оси порядка выше 2-го въ единственомъ числѣ (§ 113).

Такія строенія обладаютъ λ^4, $Л^4$, λ^3 или λ^6. Всѣ онѣ рѣзко распадаются на *двѣ группы*. Тѣ, которыя обладаютъ λ^4 или $Л^4$ могутъ быть отнесены къ 3-мъ взаимноперпендикулярнымъ координатнымъ осямъ, изъ которыхъ двѣ (X и Y, если λ^4 или $Л^4$ выбрать за Z) всегда идентичны. Очевидно, къ нимъ относится, на основаніи вышеизложеннаго, и строеніе $\lambda^2\ 2L^2\ 2P'$. Тождество такихъ осей X и Y вытекаетъ изъ свойствъ оси, принятой за Z.

Строенія, обладающія λ^3 или λ^6, не могутъ быть отнесены къ системѣ 3-хъ взаимноперпендикулярныхъ кординатныхъ осей, такъ какъ благодаря свойству λ^3 (а слѣдовательно и λ^6) перпендикулярные къ нимъ векторы могутъ быть идентичны, если они дѣлаютъ уголъ въ 120^0, а не въ 90^0. Кромѣ того λ^3 или λ^6 требуетъ, чтобы такихъ векторовъ было въ перпендикулярной къ ней плоскости три, а не два.

125. Пользуясь этими данными, мы получаемъ еще двѣ системы:

4) ***Квадратную систему*** [1]), когда могутъ быть выбраны 3 взаимноперпендикулярныя координатныя оси, причемъ ось симметріи отличная отъ всѣхъ прочихъ, принимается за ось Z. Оси X и Y со-

---

[1]) Тетрагональная с.

впадаютъ съ идентичными между собою и отличными отъ Z векторами, причемъ, когда возможно, эти векторы совпадаютъ съ L^2, когда ихъ нѣтъ съ $Л^1$ (§ 97), а когда и ихъ нѣтъ, то съ какими нибудь векторами, лежащими въ плоскости перпендикулярной къ Z и дѣлающими между собою уголъ въ 90^0.

Кристаллическая ячейка представляетъ прямоугольный параллелипипедъ, въ которомъ параметры рядовъ, принятыхъ за X и Y равны, слѣдовательно петля сѣти, въ которой лежатъ эти оси, имѣетъ форму правильнаго *квадрата*. Сюда относятся строенія: 9) λ^4, 10) $Л^4$, 11) λ^4 *с* π, 12) λ^4 $4L^2$, 13) λ^4 $4P$, 14) λ^4 *с* π $4L^2$ $4P$ и 15) λ^2 $2L^2$ $2P'$.

126. Совершенно другой характеръ имѣетъ другая группа строеній, обладающихъ λ^3,—группа, которая получила названіе *гексагональной системы*. Въ этой системѣ всегда существующая въ ней λ^3 принимается за ось Z, а оси X и Y лежатъ въ плоскости, къ ней перпендикулярной. За оси X и Y, согласно общему правилу мы будемъ брать по возможности L^2 или $Л^1$ [1]). Въ такомъ случаѣ необходимо брать за оси векторы образующіе между собою уголъ въ 120^0, такъ какъ такіе углы дѣлаютъ въ этихъ строеніяхъ L^2 или $Л^1$ перпендикулярныя къ λ^3.

Однако λ^3 требуетъ *трехъ* однозначныхъ векторовъ, одинаково къ ней наклоненныхъ, и въ физическихъ явленіяхъ важно не дѣлать никакого различія между всѣми этими идентичными векто-

---

[1]) Такой выборъ осей X и Y является не общепринятымъ. Его основы положены Х. Вейссомъ (1816), но почти одновременно при изученіи ромбоэдровъ (§ 54) Ламэ (1818) далъ способъ отнесенія ихъ къ тремъ координатнымъ осямъ, выбраннымъ не среди элементовъ симметріи; за оси Ламэ принялъ три ребра ромбоэдра. Этотъ методъ Ламэ былъ введенъ въ кристаллографію Миллеромъ (1839). Позже была предложена еще третія система координатныхъ осей Шрауфомъ (1863). Шрауфъ принялъ за оси X, Y, Z три взаимноперпендикулярныя линіи, изъ которыхъ Z совпадаетъ съ L^3, а X и Y ей перпендикулярны. Способъ обозначенія Ламэ не находится въ прямой связи съ симметріей, но онъ имѣетъ нѣкоторыя геометрическія удобства и его придерживаются или для всѣхъ строеній гексагональной с. или для нѣкоторыхъ (которыя отдѣляются въ такъ называемую ромбоэдрическую систему) многіе изслѣдователи, напр., Гротъ. Однако, въ виду большой произвольности въ выборѣ этихъ осей и отсутствію связи съ физическими свойствами кристалловъ, я оставлю въ сторонѣ этотъ способъ обозначенія гексагональной системы. Еще сложнѣе способъ Шрауфа.

рами. Поэтому, удобно принимать для гексагональной системы не три, а *четыре* координатныя оси. Хотя съ чисто геометрической точки зрѣнія четвертая ось (ось U) является лишней, безъ нея можно обойтись, и ея координаты, очевидно, находятся въ простомъ отношеніи къ координатамъ, взятымъ по X и Y — но въ физическихъ вопросахъ важно сохранить существующую въ этой системѣ идентичность векторовъ, лежащихъ въ плоскости, перпендикулярной къ Z и дѣлающихъ между собою уголъ въ 120^0 (ср. § 160). Такимъ образомъ форма ячейки (образованной X, Y и Z) въ гексагональной с. представляетъ параллелепипедъ, плоскость Y котораго имѣетъ форму равносторонняго ромба, съ угломъ между сторонами въ 120^0 и перпендикулярна боковымъ плоскостямъ, образованнымъ прямоугольниками. Оси X и Y идентичны и слѣдовательно параметры ихъ равны между собою.

Къ этой системѣ относится наибольшее количество кристаллическихъ строеній: 16) λ^3, 17) λ^6, 18) $\lambda^3\ c$, 19) $\lambda^3\ \pi$, 20) $\lambda^6\ c\ \pi$, 21) $\lambda^3\ 3L^2\ c\ 3P$, 22) $\lambda^3\ 3L^2\ \pi\ 3P'$, 23) $\lambda^6\ 6L^2\ c\ \pi\ 6P$, 24) $\lambda^3\ 3L^2$, 25) $\lambda^6\ 6L^2$, 26) $\lambda^3\ 3P$, 27) $\lambda^6\ 6P$.

126. Наконецъ, остались такія 5 кристаллическихъ строеній, въ которыхъ наблюдается нѣсколько осей симметріи порядка выше 2-го. Всѣ онѣ обладаютъ комплексомъ $3\lambda^2\ 4L^3$, гдѣ $3\lambda^2$ всегда взаимноперпендикулярны и идентичны, такъ какъ онѣ лежатъ подъ одинаковымъ наклономъ къ L^3. Понятно поэтому, что всѣ онѣ могутъ быть отнесены къ одной системѣ координатныхъ осей, которыя всѣ взаимноперпендикулярны и идентичны. За координатныя оси принимаются здѣсь $3\lambda^4$, а если ихъ нѣтъ то $3\lambda^2$, которыя ихъ замѣняютъ, т. е. связаны съ $4L^3$ въ формѣ комплекса $3\lambda^2\ 4L^3$ (§ 108). Эта кристаллическая система называется *правильной* или *тессеральной*.

Ячейка этой системы представляетъ кубъ. Такая ячейка обладаетъ замѣчательными свойствами: она соотвѣтствуетъ системѣ координатныхъ осей, не только не мѣняющей своего относительнаго положенія при нагрѣваніи или сжатіи тѣла, но сохраняющей неподвижность и при переходѣ отъ одного химическаго соединенія въ другое. Въ этой системѣ отношенія отрѣзковъ, взятыхъ на различныхъ координатныхъ осяхъ, постоянны, какъ бы ни мѣнялся химическій составъ тѣла или его температура. Слѣдовательно взаимное

расположеніе молекулъ въ пространствѣ въ этихъ кристаллическихъ строеніяхъ, не зависитъ отъ химическаго состава.

Сюда относятся строенія: 28) $3\lambda^2\ 4L^3$, 29) $3\lambda^4\ 4L^3\ 6L^2$, 30) $3\lambda^2\ 4L^3$ *с* 3π, 31) $3\lambda^2\ 4L^3\ 6P$ и 32) $3\lambda^4\ 4L^3\ 6L^2$ *с* $3\pi\ 6P$.

127. Такимъ образомъ, по формѣ и по свойствамъ пространственныхъ рѣшетокъ всѣ 32 строенія распадаются въ зависимости отъ симметріи кристаллическаго вещества на шесть кристаллическихъ системъ. Каждое строеніе получило свое названіе. Эти названія сложились историческимъ путемъ внѣ всякой зависимости отъ ученія о симметріи. Нѣкоторыя изъ строеній получили названіе голоэдріи, другія геміэдріи, тетартоэдріи, гемиморфизма, причемъ предполагалось, что эти названія соотвѣтствуютъ особымъ явленіямъ кристаллизаціи. Для насъ всѣ онѣ являются *равнозначными;* прежнія различія, сохранившіяся въ этихъ названіяхъ, потеряли для насъ смыслъ и являются историческимъ пережиткомъ. *Голоэдріей (полногранным отдѣленіемъ)* называютъ строеніе наиболѣе богатое симметріей изъ числа тѣхъ, которыя принадлежатъ къ одной и той же системѣ. Излагать причины, побудившія называть другія геміэдріей и т. д., я здѣсь не буду. Въ послѣднее время, послѣ окончательной побѣды ученія о симметріи, въ употребленіе входятъ новыя названія, изъ которыхъ наибольшимъ распространеніемъ начинаетъ пользоваться обозначеніе Грота (1895 г.)—Федорова (1891 г.). Но гораздо удобнѣе избѣгать по возможности совсѣмъ названій и пользоваться символами строеній—т. е. формулами характеризующими комплексы симметріи строенія. Такой пріемъ употреблялся уже Бравэ и былъ развитъ Малляромъ (1878 г.).

Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены новыя (Грота), старыя [1]) названія и символы симметріи (на лѣво).

---

[1]) Старыхъ названій было очень много. Я употребляю здѣсь наиболѣе упрощенныя, вошедшія въ жизнь русскихъ ученыхъ, подъ вліяніемъ Купффера и Кокшарова.

Таблица кристаллическихъ строеній.

	Старыя названія.	Названія Грота.
I. Триклиническая система.		
1. Нѣтъ элементовъ симметріи	— Геміэдрія	Асимметрическій классъ.
2. c	— Голоэдрія.	Пинакоидальный „
II. Моноклиническая система.		
3. λ^2 c π	— Голоэдрія.	Призматическій „
4. λ^2	— Гемиморфизмъ.	Сфеноидальный „
5. π	— Геміэдрія.	Доматическій „
III. Ромбическая система.		
6. $3\lambda^2$ c 3π	— Голоэдрія.	Бипирамидальный „
7. $3\lambda^2$	— Геміэдрія.	Бисфеноидальный „
8. λ^2 $2P$	— Гемиморфизмъ.	Пирамидальный „
IV. Квадратная система.		
9. λ^4 $4L^2$ c π $4P$	— Голоэдрія	Дитетрагонально—бипирамидальный „
10. λ^4 $4L^2$	— Трапецоэдрическая геміэдрія.	Трапецоэдрическій „
11. λ^2 $2L^2$ $2P'$	— Сфеноидическая геміэдрія.	Скаленоэдрическій „
12. λ^4 c π	— Пирамидальная геміэдрія.	Бипирамидальный „
13. λ^4 $4P$	— Гемиморфизмъ.	Дитетрагонально—пирамидальный „
14. λ^4	— Тетартоэдрія.	Пирамидальный „
15. λ^4	— Сфеноидическая тетартоэдрія.	Бисфеноидальный „
V. Гексагональная система.		
16. λ^6 $6L^2$ c π $6P$	— Голоэдрія.	Дигексагонально—бипирамидальный „
17. λ^3 $3L^2$ c $3P$	— Ромбоэдрическая геміэдрія.	Дитригонально—скаленоэдрическій „
18. λ^6 c π	— Пирамидальная геміэдрія.	Бипирамидальный гексагон. сист. „
19. λ^6 $6L^2$	— Трапецоэдрическая геміэдрія.	Трапецоэдрическій гексаг. сист. „

	Старыя названія.	Названія Грота.
20. $\lambda^3\ 3L^2\ \pi\ 3P'$	— Дитригональная геміэдрія.	Дитригонально—бипирамидальный классъ.
21. $\lambda^6\ 6P$	— Гемиморфизмъ.	Дигексагонально—пирамидальный „
22. λ^6	— Геміэдрическій гемиморфизмъ.	Пирамидальный гексаг. с. „
23. $\lambda^3\ 3L^2$	— Трапецоэдрическая тетартоэдрія.	Трапецоэдрическій тригон. сист. „
24. $\lambda^3\ c$	— Ромбоэдрическая тетартоэдрія.	Ромбоэдрическій „
25. $\lambda^3\ \pi$	— Пирамидальная тетартоэдрія.	Бипирамидальный тригональной сист. „
26. λ^3	— Огдоэдрія.	Пирамидальный тригон. с. „
27. $\lambda^3\ 3P$	— Ромбоэдрическій гемиморфизмъ.	Дитригонально—пирамидальный „

VI. Правильная система.

28. $3\lambda^4\ 4L^3\ 6L^2\ c\ 3\pi\ 6P$	— Голоэдрія.	Гексакисъ—октаэдрическій „
29. $3\lambda^4\ 4L^3\ 6L^2$	— Гироэдрическая геміэдрія.	Пентагонально—икситетраэдрич. „
30. $3\lambda^2\ 4L^3\ c\ 3\pi$	— Додекаэдрическая геміэдрія.	Діакисъ—додекаэдрическій „
31. $3\lambda^2\ 4L^3\ 6P$	— Тетраэдрическая геміэдрія.	Гексакисъ—тетраэдрическій „
32. $3\lambda^2\ 4L^3$	— Тетартоэдрія.	Тетраэдрически — пентагонально-додекаэдрическій „

Въ дальнѣйшемъ изложеніи я не буду пользоваться этими сложными и путанными названіями, а перейду къ обозначенію символами, стоящими въ лѣвомъ столбцѣ. Можетъ быть удобно только сохранить названіе голоэдрій для строеній системы съ максимальной для нея симметріей.

128. Группы кристаллическихъ системъ въ связи съ симметріей эллипсоидальныхъ поверхностей. На основаніи различныхъ физическихъ свойствъ шесть кристаллическихъ системъ могутъ быть соединены въ еще бо́льшія естественныя группы. Наибольшее значеніе имѣютъ тѣ ихъ группировки, которыя основываются на симметріи эллипсоида.

Я уже нѣсколько разъ указывалъ, что векторіальность кристалла не будетъ выражаться (§§ 59, 100) для нѣкоторыхъ свойствъ формой многогранника. Таковы, напр., оптическія, электрическія, магнитныя, тепловыя явленія въ кристаллахъ. Все это такія свойства, которыя, напр., не могутъ имѣть различную величину по двумъ направленіямъ одной и той же линіи, т. е. онѣ должны быть одинаковы для строеній, обладающихъ и необладающихъ центромъ симметріи. Ибо когда нѣтъ центра симметріи, направленія AB и BA (обозначены стрѣлками — рис. 19) одной и той же линіи могутъ обладать разными свойствами, если онѣ не связаны между собою другими элементами симметріи тѣла. Если же есть центръ симметріи, то эти направленія неизбѣжно идентичны, ибо при существованіи центра симметріи (§ 98) $BC=CA$.

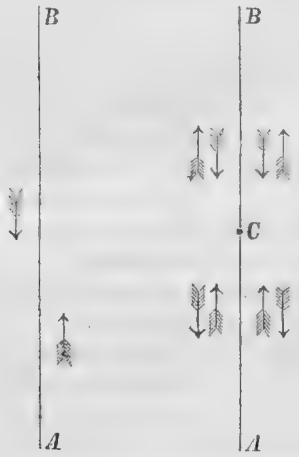


Рис. 19.

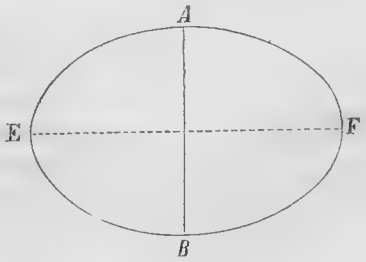


Рис. 20.

Съ другой стороны, все это такія *физическія явленія, которыя мѣняются непрерывно и постепенно, безъ скачковъ и перерывовъ*. Зависимость ихъ отъ направленія можетъ быть выражена въ видѣ непрерывной функціи вектора въ кристаллѣ.

Въ такихъ свойствахъ, въ какой нибудь плоскости, векторы начиная отъ наименьшей величины (рис. 20, AB) достигаютъ совершенно постепенно и безъ скачковъ наибольшей EF и пройдя ее должны вернуться вновь къ исходной наименьшей величинѣ, точно

также безъ всякихъ скачковъ и періодичныхъ колебаній. Очевидно, что въ такомъ случаѣ всѣ векторы, исходящіе изъ какой нибудь точки O опишутъ совершенно правильную геометрическую фигуру. Эта фигура неизбѣжно будетъ *эллипсисомъ*, ибо, какъ легко сообразить, только взаимноперпендикулярное расположеніе максимальныхъ и минимальныхъ векторовъ и постепенный, лишенный колебаній, переходъ ихъ друга въ друга, будетъ отвѣчать поставленнымъ выше условіямъ; въ то же время такія свойства характеризуютъ эллипсисъ.

Такимъ образомъ сѣченіе поверхности, выражающей подобныя явленія въ кристаллѣ какой нибудь плоскостью даетъ намъ эллипсисъ.

Слѣдовательно въ пространствѣ законъ такихъ явленій будетъ выражаться геометрической поверхностію, всякое сѣченіе которой, вообще говоря, есть эллипсисъ. Такого рода поверхностію будетъ въ общей формѣ *эллипсоидъ о трехъ осяхъ*.

129. Въ эллипсоидѣ о трехъ осяхъ, есть три особенныхъ направленія (рис. 21) — три его сопряженныхъ діаметра— наибольшій ZZ, наименьшій, ему перпендикулярный $Y\overline{Y}$ (я буду называть ихъ *1-ой и 2-ой биссектрисами*) и перпендикулярный къ нимъ обоимъ третій—*медіана* $X\overline{X}$— по величинѣ промежуточный между ними. Эти три направленія могутъ быть приняты за координатныя оси X, Y и Z эллипсоида о трехъ осяхъ.

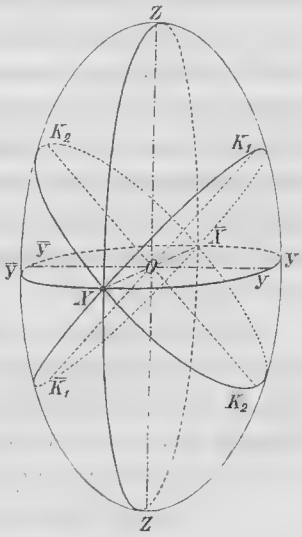


Рис. 21.

Эти эллипсоиды должны подчиняться всѣмъ тѣмъ законностямъ, которыя существуютъ въ кристаллической средѣ, слѣдовательно *должны соотвѣтствовать симметріи кристалла*. Ибо симметрія (§ 82) кристалла выведена нами путемъ изученія физическихъ свойствъ кристалловъ и является ничѣмъ инымъ, какъ выраженіемъ векторіальности и однородности ихъ строенія. Поэтому ея элементы должны быть присущи всѣмъ физическимъ свойствамъ, наблюдаемымъ въ кристаллѣ.

Какова же симметрія эллипсоида о трехъ осяхъ? Въ немъ есть центръ симметріи, т. к. оба направленія одной и той же линіи въ

немъ (§ 128) идентичны. Въ то же время его биссектрисы и медіана являются осями симметріи 2-го пор., ибо всюду отъ нихъ въ обѣ стороны величина векторовъ переходитъ постепенно, одинаковымъ образомъ и безъ скачковъ отъ maximum'а къ minimum'у или наоборотъ. Слѣдовательно, перпендикулярныя къ нимъ плоскости (XY, YZ и XZ) неизбѣжно (§ 110), будутъ плоскостями симметріи. *Такимъ образомъ симметрія эллипсоида о трехъ осяхъ выразится символомъ* $3\lambda^2$ *с* 3π.

130. Симметрія этого эллипсоида зависитъ: 1) отъ характера выражаемаго имъ явленія, которое мѣняется съ векторами непрерывно и безъ скачковъ и 2) отъ характера той среды (кристалла), въ которой наблюдается данное явленіе. Понятно, поэтому, что, если симметрія среды *меньше* симметріи явленія, то законъ явленія въ ней все же выразится эллипсоидомъ и дастъ намъ о средѣ болѣе симметричное впечатлѣніе, чѣмъ какое должно было бы истекать изъ ея структуры. Въ кристаллахъ, въ системахъ моноклинической, ромбической и триклинической, симметрія меньше (или равна) симметріи трехоснаго эллипсоида. Очевидно, существующіе въ нихъ элементы симметріи должны соотвѣтствовать, совпадать съ элементами симметріи эллипсоида, такъ напр. въ строеніи π (монокл. сист.), плоскость симметріи тѣла должна совпасть съ одной изъ плоскостей симметріи эллипсоида — съ одной изъ его плоскостей XY, YZ или XZ и т. д.

Такимъ образомъ физическія явленія изучаемыя въ этихъ системахъ будутъ выражаться одной и той же геометрической поверхностью—различными эллипсоидами о трехъ осяхъ. Поэтому всѣ эти системы могутъ быть соединены въ одну большую группу твердыхъ тѣлъ — такъ называемую *двуосную группу кристалловъ* [1]).

131. Явленіе выразится иначе, когда симметрія среды (кристалла) *выше* симметріи эллипсоида. Здѣсь можно различить два случая: 1) въ кристаллѣ существуетъ одна ось порядка выше 2-го и 2) въ кристаллѣ есть нѣсколько осей порядка выше 2-го. Разсмотримъ сперва первый случай.

---

[1]) Названіе происходитъ отъ того, что эллипсоидъ о трехъ осяхъ имѣетъ два особыхъ направленія — перпендикуляра къ двумъ круговымъ сѣченіямъ K_1 K_1 и K_2 K_2, которыя носятъ названіе осей физическаго явленія (оптическія оси и т. д.)—см. ниже въ главѣ о свѣтовыхъ свойствахъ кристалловъ.

L^n, гдѣ $n > 2$—представляетъ такой элементъ симметріи котораго совсѣмъ нѣтъ въ эллипсоидѣ о трехъ осяхъ. Въ перпендикулярной къ ней плоскости всегда существуетъ нѣсколько (по крайней мѣрѣ *двѣ*) линіи, которыя идентичны по отношенію ко всѣмъ физическимъ свойствамъ, слѣдовательно и по отношенію къ тѣмъ свойствамъ, какія выражаются закономъ эллипсоида. При этихъ условіяхъ эллипсисъ сѣченія такого эллипсоида (§ 128) неизбѣжно превратится въ кругъ, т. к. эллипсисъ, у котораго равны по крайней мѣрѣ два сопряженныхъ діаметра, есть кругъ. Въ строеніяхъ этихъ системъ такого рода свойствами будутъ обладать только сѣченія перпендикулярныя къ L^n гдѣ $n > 2$; во всѣхъ же остальныхъ ихъ сѣченіяхъ симметрія не вызываетъ равенства двухъ векторовъ.

Какъ только L^n будетъ лежать перпендикулярно къ круговому сѣченію, она въ эллипсоидѣ получитъ свойства L^∞, а соотвѣтствующій ей эллипсоидъ будетъ *эллипсоидомъ вращенія* въ которомъ L^∞ будетъ осью вращенія.

Симметрія эллипсоида вращенія очень проста и представляетъ *общій видъ* симметріи всѣхъ строеній квадратной и гексагональной системъ. Ея символъ будетъ $\lambda^\infty \pi \infty L^2 c^\infty P$, ибо очевидно, въ немъ есть c и, слѣдовательно, плоскость перпендикулярная къ λ^∞ будетъ плоскостью симметріи (π). Всякій діаметръ перпендикулярнаго къ λ^∞ круга сѣченія эллипсоида будетъ, очевидно, L^2 и такихъ осей будетъ ∞; а всякая плоскость, проходящая черезъ ось вращенія эллипсоида будетъ плоскостію симметріи (P); такихъ плоскостей въ эллипсоидѣ будетъ конечно, также безконечно много (§ 111).

Символъ $\lambda^\infty \pi \infty L^2 c \infty P$, очевидно, представляетъ обобщенное выраженіе для симметріи этихъ системъ, ибо онъ будетъ удовлетворять всѣмъ ихъ строеніямъ.

Слѣдовательно вторую группу системъ, такъ называемую *группу одноосныхъ кристалловъ*, будутъ составлять строенія гексагональной и квадратной системъ.

132. Остались строенія правильной системы, въ которыхъ есть не одна, а нѣсколько осей симметріи порядка выше 2-го; въ нихъ, очевидно, всякое сѣченіе эллипсоида, перпендикулярное къ L^3 или L^4, будетъ *кругомъ*. Такихъ сѣченій здѣсь будетъ по крайней мѣрѣ

четыре, эллипсоидъ же въ которомъ больше чѣмъ два сѣченія имѣютъ форму круга,—превращается въ *шаръ* [1]).

Такимъ образомъ въ этихъ кристаллическихъ веществахъ *физическія явленія, подчиненныя закону эллипсоида, не будутъ обладать векторіальностію и не зависятъ отъ направленія.* Законы ихъ выражаются въ формѣ шара. Симметрія шара представляетъ *общій видъ* симметріи правильной системы. Очевидно въ шарѣ есть центръ симметріи (центръ шара); всякое его сѣченіе проходящее черезъ центръ, есть плоскость симметріи, всякій его діаметръ есть L^{∞}. Такимъ образомъ его симметрія выражается символомъ $\infty\,\lambda^{\infty}\,c\,\infty\,\pi$. Подъ этотъ символъ подойдутъ всѣ строенія правильной симметріи.

Тѣла правильной симметріи представляютъ *группу изотропныхъ кристалловъ*, при чемъ къ слову «изотропный» надо прибавлять названіе соотвѣтствующаго физическаго свойства: оптически изотропные, термически изотропные и т. д.

133. Такимъ образомъ, въ концѣ концовъ мы имѣемъ слѣдующую группировку кристалловъ:

1. *Двуосные кристаллы:* системы триклиническая, моноклиническая и ромбическая—8 строеній.
2. *Одноосные кристаллы:* системы квадратная и гексагональная—19 строеній.
3. *Изотропные кристаллы:* система правильная—5 строеній.

Кромѣ такихъ классификацій возможны, однако, классификаціи и по инымъ признакамъ—но онѣ всѣ будутъ менѣе общими. Можно получить еще дѣленія этихъ большихъ группъ на основаніи тѣхъ или иныхъ свойствъ. Есть, напр., физическія свойства въ кристаллѣ выражаемыя непрерывною, но періодически измѣняемою функціею; векторіальность такихъ явленій выливается въ поверхности болѣе сложныя, чѣмъ эллипсоиды и шаръ (напр., поверхности упругихъ свойствъ кристалловъ и т. д.).

Но никогда—при такихъ классификаціяхъ—не нарушается граница между группами системъ, хотя иногда отдѣльныя строенія различныхъ системъ въ предѣлахъ одной и той же группы могутъ соединяться—по тѣмъ или инымъ признакамъ—вмѣстѣ.

---

[1]) Въ каждомъ эллипсоидѣ о трехъ осяхъ есть два круговыхъ сѣченія, но больше ихъ быть не можетъ. Объ этомъ см. главу объ оптическихъ свойствахъ кристалловъ.

Такимъ образомъ, съ физической точки зрѣнія, наиболѣе основныя черты кристаллической матеріи проявляются въ 32 кристаллическихъ строеніяхъ и въ 3-хъ группахъ системъ.

134. **Молекулярныя теоріи кристалла.** Во всемъ предыдущемъ изложеніи мы оставались на точномъ и нерушимомъ фундаментѣ фактовъ и прилагали къ нему столь же безспорные выводы геометріи. Такъ выведены законы симметріи (§ 91 сл.), пространственныя рѣшетки (§ 64 сл.), кристаллическія системы (§ 123 сл.) и ихъ группы (§ 130 сл.). Всѣ эти выводы и всѣ эти понятія находятся внѣ связи съ какими бы то ни было гипотетическими предположеніями о структурѣ матеріи или кристалла, внѣ всякой зависимости отъ тѣхъ или иныхъ представленій о молекулахъ или атомахъ, строющихъ кристаллическое вещество. Но въ послѣднее время всѣ эти общія положенія тѣсно сплелись съ своеобразными молекулярными гипотезами о строеніи кристалловъ; онѣ математически выводятся изъ нѣкоторыхъ изъ такихъ гипотетическихъ представленій на ряду съ очень многими другими положеніями этихъ теорій, которыя не получили никакого подтвержденія на опытномъ или наблюдательномъ матеріалѣ. Нерѣдко совпаденіе теоретически выведенныхъ изъ молекулярныхъ теорій 32 кристаллическихъ строеній, элементовъ и законовъ симметріи, съ наблюденными на опытѣ случаями многими считается подтвержденіемъ тѣхъ или иныхъ молекулярныхъ теорій кристалла. Такое представленіе получило еще большее развитіе вслѣдствіе того, что крупные шаги въ выясненіи этихъ основныхъ воззрѣній кристаллографіи нерѣдко дѣлались тѣми же учеными, которые разработывали молекулярныя теоріи кристалла; иногда они были даже выведены ими на почвѣ этихъ молекулярныхъ представленій.

Однако, какъ мы видѣли, можно получить всѣ эти результаты внѣ всякихъ гипотезъ и, очевидно, въ научныхъ изслѣдованіяхъ необходимо и законно прибѣгать къ гипотезамъ только въ томъ случаѣ, когда эти гипотетическія данныя открываютъ передъ нами новыя явленія или новыя законности, являются менѣе сложными, чѣмъ объясняемое ими явленіе, составляютъ удобную и надежную руководящую нить въ трудныхъ и неясныхъ вопросахъ, стоящихъ передъ изслѣдователемъ. Ничего подобнаго не дали молекулярныя теоріи кристалла. Всѣ разнообразныя попытки ихъ приложенія къ явленіямъ спайности, двойниковъ, вращенія плоскости поляризаціи

свѣта, кристаллизаціи и къ химическимъ свойствамъ тѣлъ до сихъ поръ—въ теченіе больше 20 лѣтъ—не дали *ни одного* безспорнаго даннаго. Только въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы подошли этимъ путемъ къ болѣе или менѣе удобнымъ схемамъ природныхъ явленій.

Но все же ихъ нельзя оставить безъ упоминанія, ибо имъ слѣдуютъ многіе ученые, они проникаютъ текущую научную литературу, отражаются рѣзко и своеобразно на языкѣ и темахъ работъ. Невозможность приложенія этихъ теорій въ цѣломъ, не исключаетъ выясненія съ помощью нихъ тѣхъ или иныхъ отдѣльныхъ воззрѣній, которыя могутъ войти въ научное сознаніе и оказаться основанными на болѣе прочномъ фундаментѣ, чѣмъ послужившая къ ихъ выводу гипотеза. Такъ и въ кристаллографію проникли ученія о симметріи или идея пространственныхъ рѣшетокъ. Въ исторіи всего естествознанія такое значеніе гипотезъ проявляется на каждомъ шагу. Особенно въ области химическихъ свойствъ кристалла мы можемъ ждать здѣсь новыхъ данныхъ, которыя позволятъ разобраться въ сложномъ хаосѣ явленій, въ безконечной грудѣ отдѣльныхъ фактовъ.

135. Попытки атомистическихъ теорій [1]) кристалла проникаютъ кристаллографію съ самаго ея зарожденія. Онѣ служатъ проявленіемъ философской или метафизической мысли, на нихъ отражается фантазія экспериментатора-натуралиста, абстракція геометра.

Можно разбить эти теоріи на двѣ группы: 1) теоріи, которыя принимаютъ во вниманіе *форму* молекулъ, обладающихъ измѣримымъ, небольшимъ объемомъ и правильно распредѣленныхъ въ про-

---

[1]) До сихъ поръ чисто динамическія воззрѣнія на строеніе кристалла имѣли мало значенія. Онѣ сыграли извѣстную роль въ исторіи нашей науки въ началѣ XIX вѣка въ трудахъ Бернгарди, Вейсса, Фукса и др. Отъ времени до времени видны ихъ отголоски въ работахъ кристаллографовъ, напримѣръ у Удэ (1835), Карстена (1861), Лемана (1890 сл.) и др. Нѣкоторыя проявленія философскаго атомизма носятъ переходный характеръ, такъ какъ легко, простыми перестановками словъ, могутъ быть переведены въ динамическія воззрѣнія. Такой атомизмъ, исходящій отъ Бошковича, сильно проявляется въ современныхъ молекулярныхъ теоріяхъ кристалла. Я соединяю въ своемъ изложеніи всѣ проявленія атомизма, въ томъ числѣ и такого формальнаго.

Точно также мало имѣли значенія теоріи, связанныя съ *движеніемъ* частицъ или точекъ. Здѣсь лежитъ еще нетронутая область для кристаллографа теоретика и на ея значеніе не разъ прійдется указывать (§ 144).

странствѣ и 2) теоріи, основанныя исключительно на правильности въ *распредѣленіи* одинаковыхъ точекъ въ кристаллѣ. Въ теоріяхъ перваго рода принимается во вниманіе наружная форма молекулы, вызываемая распредѣленіемъ ея химическихъ атомовъ; теоріи втораго рода оставляютъ сперва въ сторонѣ химическое строеніе молекулы и ограничиваются изученіемъ возможнаго распредѣленія въ пространствѣ точекъ внутри *кристаллическихъ молекулъ*. Здѣсь достигнуто много математическихъ правильностей и въ послѣднее время, основываясь на нихъ, нарождаются дальнѣйшія представленія о распредѣленіи химическихъ атомовъ внутри кристаллической молекулы.

До извѣстной степени переходомъ между этими двумя группами воззрѣній служатъ представленія о шарообразной формѣ кристаллическихъ молекулъ, такъ какъ, при такой максимальной по симметріи формѣ молекулы, значеніе формы для объясненія свойствъ, связанныхъ съ векторіальностію, исчезаетъ.

136. Первыя зарожденія идей о молекулярной структурѣ кристалла можно видѣть еще въ самомъ началѣ XVII вѣкѣ у Кеплера, который предполагалъ, что снѣжинки состоятъ изъ мельчайшихъ шарообразныхъ частичекъ, соприкасающихся по извѣстнымъ законамъ и дающихъ этимъ путемъ различныя геометрическія фигуры. Съ тѣхъ поръ, въ той или иной формѣ, эта идея постоянно возраждалась и возраждается въ кристаллографіи. Въ XVII столѣтіи Гассенди, Гюйгенсъ, Гукъ придавали строющимъ кристаллъ молекуламъ форму мелкихъ шариковъ или эллипсоидовъ, въ XVIII столѣтіи Боннэ и Ля Гиръ строили ихъ изъ мельчайшихъ треугольныхъ пластинокъ; Бергманнъ, Гаюи и многочисленные его послѣдователи придавали имъ форму разнообразныхъ поліэдровъ, близкую къ формамъ спайности. Къ концу столѣтія вновь возродилась идея о шарообразной или эллипсоидальной формѣ кристаллическихъ частицъ. Эту идею развивалъ въ теченіе XVIII вѣка Сведенборгъ, въ началѣ XIX ст. Волластонъ; къ ней возвратились натуралисты въ эпоху господства натурфилософіи—Зееберъ (1824), Дана (1834 сл.), Форбсъ и т. д.

Значительно позже возраждаются въ кристаллографіи старинные взгляды, связанные съ идеями XVII столѣтія о вихреобразныхъ движеніяхъ элементовъ матеріи. Исходя изъ нихъ многіе философы и физики XVII в. придавали молекуламъ твердаго вещества или форму

быстро движущаго вихря атомовъ или форму сложныхъ, неправильныхъ частицъ—системъ шариковъ, спиралей, волоконъ, изогнутыхъ пластинокъ, обладающихъ нерѣдко вращательнымъ движеніемъ. Такъ представлялъ твердое вещество въ XVII вѣкѣ Декартъ и картезіанцы, въ XVIII аналогичныя идеи проводили люди, не стоявшіе на точкѣ зрѣнія картезіанскихъ вихрей, какъ Ломоносовъ (1739—1765), Лейденфростъ (1756), въ XIX ст. физикъ и натурфилософъ Ішикъ (1814—1843). Въ кристаллографію эти идеи начали проникать лишь въ послѣдней четверти XIX вѣка, напр. въ теоретическихъ попыткахъ лорда Кельвина (1884 — 1894), въ нѣкоторыхъ изъ структурныхъ группъ Зонке (1879—см. § 142) и т. д.

137. На ряду съ такими чисто физическими теоріями, время отъ времени возникали иныя воззрѣнія, въ которыхъ принималась въ разсчетъ не только кристаллическая частица, но и тѣсно связанная съ ней форма *химической* частицы. Очевидно, идеи этого рода могли возникнуть только послѣ того, какъ въ химіи восторжествовали атомистическія воззрѣнія. Всѣ эти теоріи—созданіе XIX вѣка. Въ этомъ отношеніи въ кристаллографіи и химіи сразу установилось два теченія. Одно—господствующее—которое въ кристаллографіи ясно и точно формулировалъ Гаюи, а въ химіи Авогадро, считало, что кристаллическія частицы состоятъ изъ химическихъ, но между строеніемъ кристаллическихъ и химическихъ частицъ нѣтъ ничего общаго; онѣ регулируются разными законами. Но вскорѣ проявились и иныя теченія. Сперва въ легкой и неразработанной формѣ Волластонъ (1813), вскорѣ въ разработанной и блестящей, продуманной теоріи Амперъ (1814) высказали идеи, діаметрально противуположныя, которыя мало обратили вниманіе въ свое время. Въ этихъ идеяхъ Волластона и Ампера видимъ мы первыя, чрезвычайно ясныя проявленія современныхъ стереохимическихъ представленій, столь своеобразно развившихся въ послѣдней четверти XIX вѣка. Амперъ исходилъ изъ представленія объ единствѣ силъ и законовъ въ области физическихъ и химическихъ явленій; онъ ясно видѣлъ, что выводы, основанные на общихъ законахъ распредѣленія кристаллическихъ точекъ-атомовъ въ пространствѣ должны повторяться до извѣстной степени и въ распредѣленіи въ немъ химическихъ атомовъ и пытался, на основаніи матеріала тогдашней химіи построить систему структурныхъ химическихъ формулъ, отражаю-

щихъ въ себѣ кристаллическое строеніе. Эти идеи Ампера, которые онъ развивалъ съ каѳедры въ Collège de France не имѣли долго большаго успѣха, по скольку онѣ касались химическаго состава. Но созданное имъ представленіе о точкѣ-атомѣ проникло позже всѣ современныя физическія теоріи кристалловъ (§ 140). Въ теченіе всего XIX столѣтія отъ времени до времени повторялись, однако, подобныя же начинанія и въ химіи кристалловъ; эти начинанія болѣе или менѣе быстро безслѣдно терялись въ научномъ архивѣ. Такъ въ теченіе 40 слишкомъ лѣтъ (1832—1876) развивалъ эти идеи въ Парижѣ Годэнъ; онѣ въ той или иной формѣ получали развитіе и у другихъ ученыхъ— Бодримона, Дана, Бюисъ Баллота (1846 сл.), Шрауфа (1846—1886), Гинрикса, Віика и др. Во всѣхъ нихъ на основаніи частію химическихъ опытовъ, частію изученія кристаллической формы проявлялось убѣжденіе послѣдователей Ньютона въ единствѣ силъ химическаго сродства, сцѣпленія и тяготѣнія, изъ него истекало воззрѣніе, что на распредѣленіи въ пространствѣ химическихъ атомовъ тѣла отражается кристаллическая форма его многогранниковъ. Исходя изъ свойствъ такихъ многогранниковъ, эти ученые пытались получить представленіе о равновѣсіи въ пространствѣ химическихъ атомовъ, строющихъ тѣло подъ вліяніемъ дѣйствующихъ въ немъ силъ сродства, о соединеніи такихъ химическихъ частицъ въ кристаллическія молекулы подъ вліяніемъ иныхъ силъ сцѣпленія. Съ тѣхъ поръ, какъ окончательно пріобрѣло господство ученіе о симметріи и въ то же время началась математическая разработка молекулярныхъ теорій строенія кристалловъ изъ точекъ - атомовъ (§ 140), эти вопросы пріобрѣли новый интересъ; надъ ними работалъ уже одинъ изъ основателей ученія о симметріи—Делафоссъ (1852). Въ той или иной формѣ къ нимъ возвращаются постоянно ученые новой школы; воззрѣнія о возможности этимъ путемъ достигнуть точной стереохимической формулы твердаго соединенія постоянно проводятся современными теоретиками—Зонке, Федоровымъ, Барлоу и др., иллюстрируются ими или другими учеными на конкретныхъ примѣрахъ. Во всѣхъ этихъ теоріяхъ мы далеко отошли отъ первоначальныхъ грубыхъ, такъ сказать матеріальныхъ, представленій; атомы замѣнились центрами ихъ массы или точками, вокругъ которыхъ происходятъ ихъ сложныя движенія. Изучается только правильность распредѣленія въ пространствѣ этихъ точекъ-атомовъ. Правильныя системы

этихъ различныхъ точекъ-атомовъ, во многомъ напоминающія пространственныя рѣшетки — въ своихъ, регулируемыхъ симметріей, соотношеніяхъ, даютъ ясное образное представленіе о строеніи химическихъ частицъ твердаго кристаллическаго тѣла [1]). Будущее развитіе и значеніе такихъ представленій для химіи твердаго тѣла далеко не безнадежно; въ настоящее время оно начинаетъ сосредоточивать въ себѣ съ каждымъ годомъ все большее вниманіе изслѣдователей (§ 144). Эти теоретическія построенія развились главнымъ образомъ въ связи съ своеобразной молекулярной теоріей кристаллическаго тѣла, которая получила широкое развитіе во второй половинѣ XIX столѣтія.

138. Въ первой половинѣ XIX вѣка въ атомистическихъ представленіяхъ о матеріи совершился глубокій переворотъ, главнымъ образомъ подъ сильнымъ вліяніемъ философской мысли и философской критики. Около середины XVIII столѣтія (съ 1745 по 1785), физикъ и философъ, гражданинъ Дубровницкой республики, аббатъ Р. I. Бошковичъ развивалъ идеи объ атомистическомъ строеніи Вселенной, въ которыхъ въ значительной степени идеализировалъ атомы. Онъ доказалъ, что для пониманія явленій, какъ онѣ вытекаютъ изъ законовъ Ньютона, нѣтъ надобности придавать атомамъ протяженіе. Онъ впервые свелъ атомы къ *точкамъ*—разсматривая ихъ какъ центры силъ, которыми надѣлены атомы—или сводя ихъ къ центрамъ массы. Этимъ простымъ представленіемъ Бошковича о центрахъ силъ, точкахъ-атомахъ, раздѣленныхъ другъ отъ друга неизбѣжными промежутками, не только достигалась совершенно новая постановка вопроса о строеніи матеріи, но получалось чрезвычайно удобное орудіе научной работы въ этой области. Вѣковѣчный споръ между чисто атомистическимъ и чисто динамическимъ представленіемъ о матеріи исчезалъ, такъ какъ отпадалъ вопросъ о безконечной или конечной ея *дѣлимости*. Благодаря этому въ научныхъ работахъ не было надобности обращать вниманіе на *форму* атомовъ, на первый планъ выдвигалось *единство всѣхъ явленій*, объясняемыхъ атомистическимъ методомъ, какой бы обликъ они не принимали для нашихъ органовъ чувствъ. Пріобрѣтали значеніе только движенія атомовъ или ихъ разстоянія или присущая имъ энергія.

---

[1]) Такія идеи мы встрѣчаемъ уже у Бодримона (1844 сл.).

Бошковичъ впервые послѣ древне-греческихъ атомистовъ возстановилъ единообразіе атомовъ, онъ свелъ всѣ явленія на измѣненіе одного фактора, придавъ ему удобную для мысли форму. Въ этомъ смыслѣ онъ ближе къ Левкиппу или Демокриту, чѣмъ къ атомистамъ новаго времени, къ Гассенди и его послѣдователямъ. Онъ завершилъ математически-монистическое представленіе о Вселенной, которое было достигнуто Ньютоновой идеей *всемірнаго* тяготѣнія.

Идеи Бошковича пробивались медленно и только во второй половинѣ XIX столѣтія выступили болѣе ясно въ представленіяхъ о матеріи. Однако, ихъ вліяніе на Дальтона — и слѣдовательно на все развитіе современной химіи—было несомнѣнно. Въ кристаллографіи ихъ впервые пытались ввести въ 1813—1814 годахъ Волластонъ и особенно Амперъ (§ 137). Подъ сильнымъ его вліяніемъ въ 1820 годахъ французскіе теоретики физики — главнымъ образомъ Пуассонъ и Коши—прилагали эти идеи къ объясненію нѣкоторыхъ физическихъ свойствъ кристалловъ (1826 сл.), главнымъ образомъ въ теоріи упругости, и для этого придавали кристалламъ строеніе, близкое къ пространственнымъ рѣшеткамъ; Бодримонъ (1835—1876) развивалъ тѣже идеи въ химіи. Почти одновременно—въ лицѣ Зеебера и Тило (1824) видимъ мы предшественниковъ молекулярныхъ теорій въ Германіи. Но всѣ эти слабыя попытки исчезли послѣ работъ Франкенгейма (1835 сл.), Делафосса (1840) и главнымъ образомъ Бравэ (1848—1852), такъ какъ эти ученые впервые связали ихъ съ ученіемъ о симметріи. Мы видѣли (§ 29, 83), что ихъ труды привели къ установленію 32 строеній, къ пространственнымъ рѣшеткамъ, къ идеямъ симметріи; но они привели также и къ молекулярнымъ теоріямъ кристалла.

139. Какъ много разъ указывалось (§§ 134 и др.) ни въ пространственныхъ рѣшеткахъ, ни въ существованіи 32 строеній, ни въ симметріи—мы не дѣлаемъ *никакихъ* гипотезъ о строеніи матеріи, стоимъ на прочной почвѣ фактовъ. Но уже Бравэ сдѣлалъ такую гипотезу и пошелъ дальше фактовъ. Онъ предположилъ, что часть явленій въ кристаллѣ вызывается только массой кристаллической молекулы, не зависитъ отъ ея размѣровъ или формы. Это проявленія сцѣпленія. Для такихъ явленій молекулу можно замѣнить точкой, въ которой какъ бы сосредоточена ея масса. Совершенно такъ, какъ въ явленіяхъ тяготѣнія имѣетъ значеніе только масса

тѣла, а не его размѣры или формы. Эти атомы — точки правильно разсѣяны въ пространствѣ и образуютъ разнообразныя пространственныя рѣшетки. Исходя изъ того, что въ цѣломъ рядѣ физическихъ явленій, свойства кристалловъ по параллельнымъ линіямъ идентичны, Бравэ счелъ необходимымъ придать этимъ точкамъ такое распредѣленіе, при которомъ параллельныя линіи обладали бы всегда одинаковымъ расположеніемъ на нихъ точекъ-атомовъ.

Однако, оказалось, что этимъ путемъ не удается выразить даже тѣхъ кристаллическихъ строеній, которыя наблюдались въ природѣ, такъ, напр., ясно, что этимъ путемъ нельзя получить строеній, не обладающихъ центромъ симметріи. Поэтому Бравэ долженъ былъ прибѣгнуть къ предположенію, что форма молекулъ оказываетъ иногда вліяніе на отдѣльныя физическія явленія и что сама молекула обладаетъ иногда меньшей симметріей, чѣмъ пространственная рѣшетка проходящая черезъ центры массъ молекулъ. Молекула по наружной формѣ отвѣчаетъ симметріи кристаллическаго строенія, между тѣмъ какъ рѣшетки, проходящія черезъ центры массъ молекулъ кристалла могутъ обладать болѣе высокой симметріей; такихъ рѣшетокъ можетъ быть всего 14. Можно, поэтому, придать молекулѣ кристалла или форму многогранника или разсматривать ее, какъ составленную изъ правильнымъ образомъ расположенныхъ атомовъ, согласно симметріи того строенія, въ какомъ кристаллизуется изучаемое тѣло. Въ общемъ, къ тому же сводились идеи Франкенгейма. Въ этихъ представленіяхъ Бравэ, является однако совершенно произвольнымъ, какія изъ свойствъ зависятъ отъ распредѣленія молекулъ и какія связаны съ симметріей молекулы (т. е. съ распредѣленіемъ ея атомовъ). Поэтому, хотя математически удобно выяснить этимъ путемъ всѣ возможные случаи такихъ структуръ, но пріемъ этотъ является искусственнымъ. Онъ потерялъ вскорѣ всякое значеніе передъ общими методами рѣшенія вопроса, которые выдвинулись въ 1860—1880 годахъ. Несмотря на это, немногіе—главнымъ образомъ французскіе—кристаллографы развиваютъ дальше идеи молекулярной теоріи Бравэ, напр. въ послѣднее время Малляръ, Валлеранъ и др.

140. Новое теченіе началось въ 1860 годахъ и первыя основы его были высказаны философомъ и математикомъ Винеромъ въ 1863 году. Въ это время Винеръ выпустилъ первую часть своей теоріи мірозданія, основанной всецѣло на атомистическихъ воззрѣніяхъ.

Винеръ не далъ полнаго развитія своихъ идей, онъ намѣтилъ только общій путь рѣшенія. Дальнѣйшіе развитіе теоріи было дано Л. Зонке (1867—1894). Въ основѣ этихъ идей лежитъ представленіе о строеніи кристалла изъ точекъ-молекулъ, правильнымъ образомъ разсѣянныхъ въ пространствѣ. Кристаллъ представляется составленнымъ изъ молекулъ, но дѣлается гипотеза, что для объясненія наблюдаемыхъ въ немъ явленій достаточно принимать во вниманіе только ихъ взаимное расположеніе; для этого удобно замѣнить молекулы центрами ихъ массъ, т. е. надо представить кристаллъ, состоящимъ изъ точекъатомовъ. Взаимныя разстоянія такихъ точекъ регулируются общими законами симметріи. Всѣ явленія кристалла зависятъ только отъ распредѣленія ихъ молекулярныхъ массъ, т. е. скрыто предполагается тождество силъ сцѣпленія (и химическаго сродства) съ тяготѣніемъ. Эти воззрѣнія являются, какъ видимъ, простымъ возвращеніемъ къ идеямъ Ампера (§ 137). Однородность кристаллическаго вещества видна изъ того, что вокругъ любой изъ точекъ-атомовъ другія точки-атомы расположены такъ же, какъ вокругъ всякой другой. Задача изслѣдованія сводится на рѣшеніе чисто математическаго вопроса: сколько можетъ быть различныхъ случаевъ такого однороднаго распредѣленія въ пространствѣ точекъ и какъ онѣ могутъ быть расположены [1]).

141. Однако, прежде, чѣмъ перейти къ дальнѣйшему изложенію теорій, необходимо остановиться на одномъ, довольно важномъ, обстоятельствѣ. Въ этихъ молекулярныхъ теоріяхъ вводится представленіе о *точкѣ-атомѣ*; эти точки отнюдь не должны быть смѣшиваемы съ *гомологическими точками* (§ 61), которыя легли въ основу пространственныхъ рѣшетокъ, т. е. кристалическихъ системъ.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы не дѣлаемъ никакихъ гипотезъ, а только выражаемъ *наблюдаемое явленіе* въ удобной для работы формѣ. Мы исходимъ при этомъ изъ того факта — выводимаго путемъ опыта или наблюденія—что во всѣхъ точкахъ кристалла физическое явленіе выражается одинаковыми многогранниками или другими геометрическими поверхностями, при чемъ не только ихъ форма одинакова, но они оріентированы въ пространствѣ вполнѣ тожде-

---

[1]) При такомъ чисто математическомъ характерѣ этихъ теоретическихъ воззрѣній понятно, что такія же допущенія о строеніи однороднаго твердаго вещества иногда вскользь высказывались математиками раньше Винера,—напр. Гауссомъ и др. Однако, онѣ не получили разработки.

ственно. При этихъ условіяхъ гомологическія точки обладаютъ тѣми *свойствами*, какія выведены для нихъ въ §§ 61 сл. *Ряды* всегда состоятъ изъ гомологическихъ точекъ, которыя обладаютъ одинаковыми параметрами, лежатъ на нихъ на одинаковыхъ разстояніяхъ. Возьмемъ, напр., явленіе спайности кальцита (§ 54). Съ точки зрѣнія этого явленія кристаллъ, какъ знаемъ, можетъ быть представленъ какъ бы составленнымъ изъ мельчайшихъ ромбоэдровъ спайности, плотно приложенныхъ другъ къ другу. Строеніе этого тѣла — $L^3\ 3L^2c\ 3P$. Проведемъ плоскость, проходящую черезъ L^3 такого ромбоэдра спайности; она въ сѣченіи даетъ намъ рядъ аналогичныхъ разрѣзовъ мелкихъ ромбоэдровъ спайности $ABCD$, $BCEF$ и т. д., при чемъ всѣ они расположены строго параллельно (рис. 22). Въ каждомъ ромбоэдрѣ спайности ея положеніе будетъ выражаться линіей gH или ей параллельной. Возьмемъ въ каждомъ изъ ромбоэдровъ гомологическую точку, напр., въ центрѣ каждаго ромбоэдра—c, c' и т. д. Въ такомъ случаѣ въ рядѣ MN, перпендикулярномъ къ L^3 (gH), всѣ эти гомологическія точки будутъ лежать на одинаковыхъ разстояніяхъ, напр. a и такой параметръ этого ряда будетъ выдерживаться какъ для него, такъ и для всѣхъ ему параллельныхъ линій. Мы могли бы взять гомологическую точку иначе, напр., въ c, c', c'' и т. д.; но *всегда сохранится при этомъ одинъ и тотъ же параметръ для ряда, перпендикулярнаго* къ L^3, т. е. $cc' = c'c'' = cc' = c'c''$ и т. д. $= a$.

Совершенно другое явленіе можетъ получиться, если мы перейдемъ къ точкамъ-атомамъ. Представимъ всѣ молекулы замѣненными ихъ центрами массъ, сжатыхъ въ точки-атомы. Черезъ такія точки будутъ проходить всѣ векторы кристалла и очевидно эти точки—атомы не могутъ приблизиться другъ къ другу ближе, чѣмъ на то разстояніе, какое позволяютъ имъ ихъ отталкивательныя силы или конечные размѣры молекулы. Возьмемъ плоскость перпендикулярную къ λ^3 и посмотримъ какъ расположатся въ ней точки-атомы на линіи $M'N'$, причемъ $M'N'$ параллельна прежнему направленію, въ которомъ мы изучали распредѣленіе гомогическихъ точекъ. Очевидно (ср. § 92 сл.) эти точки-атомы въ плоскости перпендикулярной къ λ^3 расположатся въ тѣсной зависимости отъ 1) свойствъ λ^3 и 2) отъ того наименьшаго разстоянія, которое возможно для даннаго вещества въ этой плоскости, напр. для a (рис. 23).

Легко убѣдиться, что на линіи $M'N'$ точки-атомы расположатся попарно *чередуясь* на разстояніяхъ: a и 2a, и для этого ряда не будетъ существовать одного и того же параметра, а ихъ имѣется два [1]).

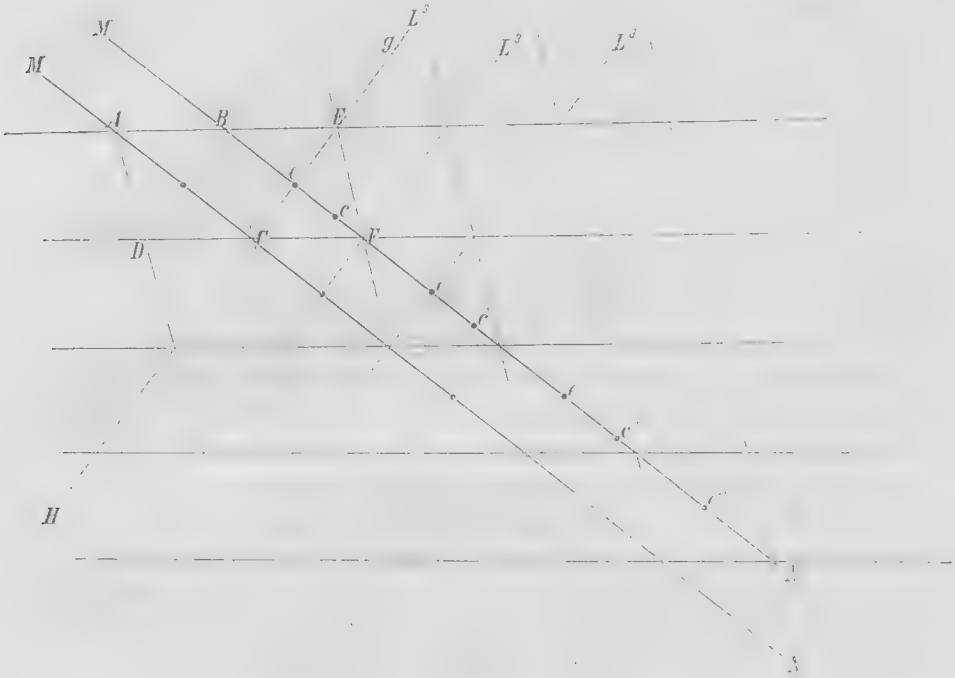


Рис. 22.

Такое различіе въ строеніи рядовъ для точекъ-атомовъ и для гомологическихъ точекъ зависитъ отъ различія понятій. При допущеніи точекъ-атомовъ мы выходимъ за предѣлы опыта и наблюденія и дѣлаемъ гипотезу, будто можно замѣнить молекулу одной ея точкой и изучая распредѣленіе этихъ точекъ въ связи съ симметріей кристалла получить законы *всѣхъ* явленій, какія выражаются въ одно-

---

[1]) Въ §§ 92 сл., я пользовался для доказательства возможности существованія въ кристаллахъ L^4, L^6 и т. д. изученіемъ распредѣленія гомологическихъ точекъ въ плоскости имъ перпендикулярной. Необходимымъ для этого условіемъ было то, чтобы двѣ гомологическія точки никогда не могли приблизиться на разстояніе меньшее, чѣмъ нѣкоторое принятое за минимальное. Очевидно, (рис. 23) *это условіе* сохраняется и для L^3—а слѣдовательно въ кристаллахъ возможна L^3.

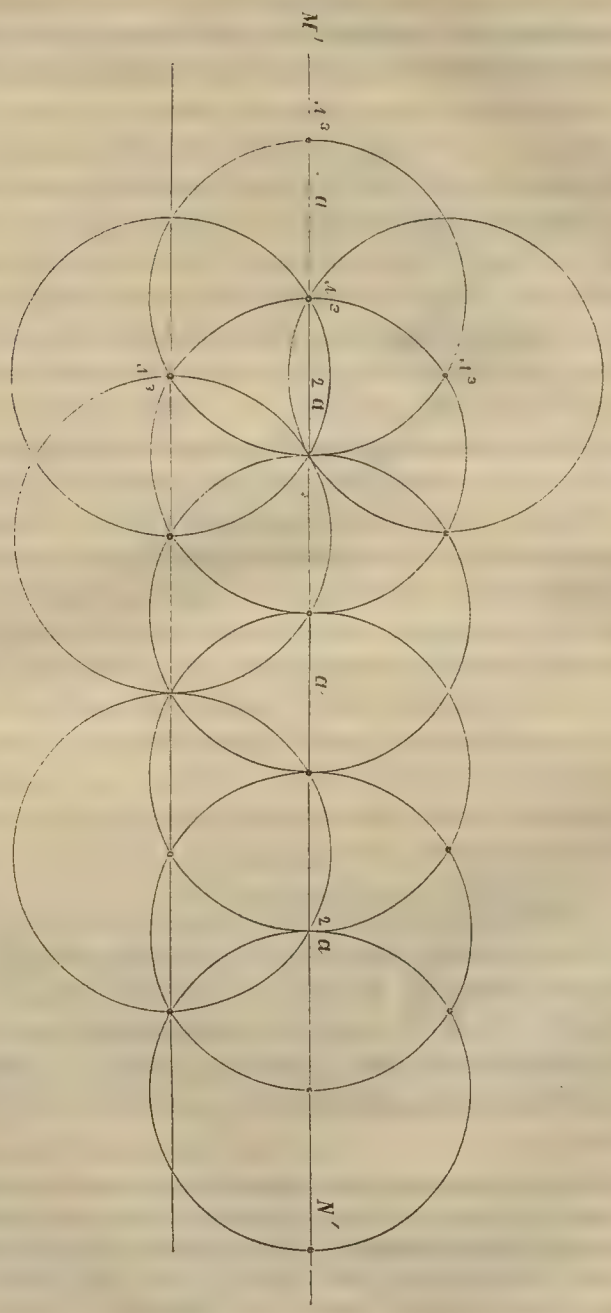


Рис. 23.

родности и векторіальности кристалла. При допущеніи гомологическихъ точекъ мы не дѣлаемъ никакой гипотезы, а выражаемъ наблюдаемыя однородность и векторіальность кристалла извѣстнымъ простымъ геометрическимъ пріемомъ. Очевидно, распредѣленія точекъ, исходящія изъ того и иного воззрѣнія, далеко не всегда будутъ совпадать между собою и напр. для строенія λ^3 (гексагональной сист.) получатся, въ перпендикулярныхъ къ λ^3 плоскостяхъ, различныя группировки точекъ.

Гипотетичность точекъ-атомовъ никогда не должна забываться при оцѣнкѣ молекулярныхъ теорій.

142. Возвратимся (§ 140) къ теоріи Зонке. Онъ разсматриваетъ кристаллъ, какъ собраніе точекъ-атомовъ, т. е. точекъ, въ которыхъ сосредоточилась масса кристаллической молекулы (Massenpunkt). Согласно однородности—принимая размѣры кристалла безконечными по сравненію съ разстояніями между точками-атомами—можно считать, что вокругъ каждой изъ точекъ-атомовъ всѣ остальныя точки-атомы расположены одинаковымъ образомъ. Очевидно, въ этой теоріи точки-атомы разныхъ веществъ различны.

Эти точки-атомы регулируются въ своемъ расположеніи элементами симметріи. При этомъ необходимо различать случаи, когда въ строеніи нѣтъ элементовъ сложной симметріи и когда они есть. Въ первомъ случаѣ мы получимъ *два* различныхъ возможныхъ распредѣленія точекъ-атомовъ, ибо они располагаются въ пространствѣ только въ зависимости отъ осей простой симметріи (=осей вращенія) и повторяемость ихъ будетъ иная, въ связи съ тѣмъ, въ какую сторону мы будемъ вращать ось симметріи — справа налѣво или слѣва направо. Въ свойствахъ оси симметріи *нѣтъ никакихъ данныхъ*, которыя бы заставляли вращать L^n въ *обѣ* стороны. Это вносится лишь сложной симметріей. Поэтому, въ строеніяхъ такого рода точки-атомы располагаются мѣстами по винтовымъ линіямъ и должны различаться винтовыя линіи справа налѣво и слѣва направо. Получаются строенія по геометрической структурѣ отвѣчающія *энантіоморфнымъ* фигурамъ (§ 181) [1]). Такого рода двойственнаго рас-

[1]) Неизбѣжное полученіе такихъ энантіоморфныхъ структуръ (правыхъ и лѣвыхъ) иногда приводится, какъ доказательство правильности молекулярныхъ теорій. И дѣйствительно, оно даетъ очень изящное выраженіе для способности, какой обладаютъ нѣкоторые кристаллы, являться въ двухъ разностяхъ—правой

положенія точекъ-атомовъ не будетъ для строеній, обладающихъ элементами сложной симметріи.

Такимъ образомъ, задача кристалической структуры можетъ быть сведена къ рѣшенію геометрическаго вопроса: сколько можетъ быть различныхъ правильныхъ группировокъ точекъ-атомовъ, однородно заполняющихъ пространство. Зонке не рѣшилъ окончательно этого вопроса. Въ общихъ чертахъ, однако, онъ показалъ, что всѣ возможныя системы точекъ располагаются (какъ само собою ясно изъ посылокъ) въ предѣлахъ 32 кристаллическихъ строеній, при чемъ почти каждому строенію отвѣчаетъ нѣсколько возможныхъ системъ точекъ-атомовъ.

Въ общей формѣ задача была рѣшена постепенно, позже, трудами гл. образомъ трехъ изслѣдователей, шедшихъ различными путями—пр. Е. С. Федорова (1881 — 1883 сл.), Барлоу (1883 сл.) и Шенфлисса (1886 сл.). Трудами этихъ лицъ къ 1890 году окончательно выяснилось, что возможно 230 группировокъ такихъ точекъ и что всѣ строенія, кромѣ триклинической системы, распадаются на этомъ основаніи на нѣсколько отдѣловъ. Выводы были сдѣланы ими разнымъ путемъ; я остановлюсь здѣсь вкратцѣ на главныхъ основаніяхъ теоріи Федорова, который раньше другихъ пришелъ (1884—1890) къ окончательнымъ выводамъ. Надо имѣть въ виду, что всѣ эти изслѣдователи въ теченіи многолѣтней своей работы мѣняли нѣкоторые свои взгляды и выводы.

143. Федоровъ—имѣя предшественникомъ Гесселя — поставилъ вопросъ о строеніи кристалла на новую почву. Распредѣленіе точекъ-молекулъ, изъ которыхъ состоитъ кристаллъ, должно быть однородно, т. е. повторяться одинаковымъ образомъ въ пространствѣ. Поэтому, задачу такого распредѣленія точекъ въ пространствѣ можно выразить иначе. Разобьемъ пространство на однородные участки всѣми возможными способами; этимъ путемъ мы получимъ всѣ расположенія точекъ, возможныя въ пространствѣ и соотвѣтствующія однородному тѣлу. Задачей изслѣдованія, слѣдовательно, является разбить пространство на всѣ отдѣльные многогранники,

---

и лѣвой, аналогичныхъ правымъ и лѣвымъ изомерамъ органическихъ соединеній ассиметрическаго углерода. Къ сожалѣнію, какъ показалъ Федоровъ (1890), дальнѣйшій анализъ не подтверждаетъ сходства такихъ винтовыхъ строеній точекъ атомовъ съ свойствами веществъ, вращающихъ влѣво или вправо плоскость поляризаціи свѣта. Къ этому вопросу я еще вернусь ниже.

которые займутъ его безъ промежутковъ (т. е. пространство и будетъ раздѣлено этимъ путемъ на всѣ возможные однородные участки) [1]).

Поліэдры обладающіе такими свойствами, по отношенію къ пространству Федоровъ назвалъ *стереоэдрами*. Эти стереоэдры очевидно не располагаются строго параллельно другъ другу. Напр., представимъ пространство разбитымъ на участки, ограниченные тетраэдрами (рис. 24). Очевидно тетраэдры могутъ заполнить пространство безъ промежутковъ, если мы будемъ складывать ихъ гранями ABC и т. д., но при этомъ они не расположатся строго параллельно, т. е. одинаковыя ихъ оси не будутъ строго параллельны, напр. L^3, выходящія въ вершинахъ тетраэдра C и т. д. [2]). Такіе стереоэдры, однако, собираются въ сложныя фигуры — *параллелоэдры*, которыя оказываются расположенными параллельно и заполняютъ пространство безъ промежутковъ. Параллелоэдры ограничены всегда парами параллельныхъ плоскостей [3]).

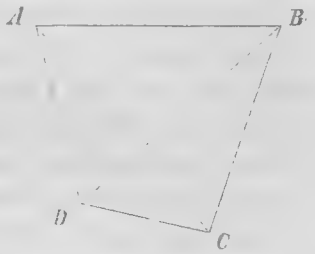


Рис. 24.

Получивъ такимъ образомъ всѣ возможные случаи однороднаго дѣленія пространства, Федоровъ дѣлаетъ гипотезу, что стереоэдръ соотвѣтствуетъ кристаллической молекулѣ (по идеѣ Бравэ) вмѣстѣ съ окружающимъ ея, зависящимъ отъ нея, пространствомъ; стереоэдры собираются въ болѣе крупныя единицы — параллелоэдры,

[1]) Совершенно тѣ же идеи развивалъ въ 1861—1876 годахъ въ многочисленныхъ недоконченныхъ мемуарахъ Бодримонъ. Онъ исходилъ изъ строенія кристалла изъ идеальныхъ поліэдровъ, заполняющихъ однороднымъ образомъ пространство безъ промежутковъ. Эти поліэдры—particules—Бодримона идентичны съ параллелоэдрами Федорова. Бодримонъ дѣлалъ отсюда рядъ разнообразныхъ выводовъ, но математическая разработка вопроса сдѣлана имъ не полно и ученіе о симметріи не было имъ ясно сознано.

[2]) При изученіи параллелизма линій надо принимать во вниманіе возможное различіе отдѣльныхъ направленій одной и той же линіи. Параллельныя линіи только тогда идентичны, когда ихъ одинаковыя направленія обращены въ одну и ту же сторону.

[3]) Очевидно параллелепипедальныя ячейки (§ 65) представляютъ одинъ изъ случаевъ параллелоэдровъ; ясно, что онѣ могутъ быть разбиты плоскостями на болѣе простые стереоэдры, которые заполнятъ пространство, но не будутъ между собою параллельны.

геометрическія свойства которыхъ отражаются на явленіяхъ, которыя въ кристаллѣ выражаются геометрическими поверхностями, строго параллельно расположенными въ пространствѣ.

144. Изучая всѣ геометрическія свойства такихъ комплексовъ, Федоровъ, подобно Зонке, вводитъ въ объясненіе правильностей еще винтовыя оси симметріи (§ 88), такъ какъ имѣетъ дѣло съ безконечными системами стереоэдровъ. Въ концѣ концовъ онъ впервые приходитъ къ тѣмъ же 230 группировкамъ однороднаго дѣленія пространства, къ которому приведены были позже воззрѣнія Зонке Шенфлиссомъ. Это и понятно, такъ какъ та и другая задача тождественны, только выражены разнымъ образомъ, ибо правильное однородное распредѣленіе въ пространствѣ точекъ, лежащихъ на конечныхъ разстояніяхъ, вполнѣ соотвѣтствуетъ дѣленію пространства на всевозможные мельчайшіе стереоэдры, въ которыхъ въ опредѣленныхъ положеніяхъ, по отношенію къ ихъ фигурѣ, могутъ мыслиться точки.

Получаемыя 230 группировокъ точекъ распадаются на 32 строенія, совершенно соотвѣтствующія кристаллическимъ строеніямъ. Но отсюда, конечно, не слѣдуетъ, чтобы 230 группировки точекъ реально существовали въ кристаллическомъ веществѣ, ибо въ основѣ ихъ не лежитъ опытъ или наблюденіе. Онѣ являются результатомъ математическаго анализа гипотезы, будто явленія, наблюдаемыя въ кристаллѣ зависятъ только отъ статическаго равновѣсія его точекъ-атомовъ (т. е. центровъ массъ его молекулъ). Мы приходимъ при этой гипотезѣ къ 32 строеніямъ только потому, что въ основу ея положены тѣ же принципы, изъ которыхъ, какъ мы видѣли, могутъ быть выведены 32 строенія безъ всякихъ дальнѣйшихъ гипотезъ. Эти принципы слѣдующіе: однородность, векторіальность, неуничтожаемость матеріи.

Въ этой гипотезѣ предполагаются всѣ точки-атомы равнозначными. Но, очевидно, можно сдѣлать и иное допущеніе, т. к. въ цѣломъ рядѣ физическихъ явленій въ кристаллахъ рѣзко отражается химическій ихъ составъ, т. е. вліяютъ химическая молекула или химическіе атомы. Поэтому, приходится допустить разноцѣнность точекъ - атомовъ или частей параллелоэдровъ. Какъ показалъ Шенфлиссъ (1891) при этомъ не получится новыхъ дѣленій, сверхъ 230 группировокъ, но эти послѣднія разобьются на новые подотдѣлы и, очевидно, ихъ

количество можетъ быть необыкновенно велико. Можно получать болѣе дробныя дѣленія, дѣлая новыя допущенія, и конца возможному дробленію такихъ системъ не предвидится. Одну изъ послѣднихъ попытокъ такого рода сдѣлалъ Барлоу (1898). Онъ замѣнилъ точки-атомы шарами разныхъ размѣровъ. Онъ остановился на трехъ размѣрахъ шаровъ, но, очевидно, можно идти на этомъ пути дальше. Въ концѣ-концовъ получилъ онъ новыя дробленія 230 группировокъ. Здѣсь въ настоящее время какъ бы происходитъ возвращеніе къ сложнымъ представленіямъ о строеніи матеріи ученыхъ теоретиковъ XVII и XVIII столѣтій—Декарта и картезіанцевъ съ ихъ вихрями и разными (какъ разъ тремя) по размѣрамъ частицами и атомистовъ XVIII столѣтія, не признававшихъ вихрей, какъ Эйлера или Ломоносова. Только въ старинныхъ воззрѣніяхъ всѣ эти гипотетическія частицы одарены были различнаго рода движеніями, а въ статическихъ системахъ обладали по крайней мѣрѣ вращательнымъ движеніемъ. Очевидно, такія статическія структуры не являются удобнымъ для работы орудіемъ; онѣ такъ же сложны и трудны для изслѣдованія, какъ и тѣ природныя явленія, къ объясненію которыхъ прилагаются.

Еще болѣе сложны атомистическія теоріи кристалла, допускающія движеніе частицъ. Такія теоріи несомнѣнно вызываются многими разнообразными явленіями, наблюдаемыми въ мірѣ кристалловъ (§ 145). Изъ этихъ теорій—наиболѣе разработана теорія Бодримона (1861 — 1873), основанная на правильныхъ движеніяхъ кристаллическихъ частицъ, происходящихъ въ опредѣленныхъ плоскостяхъ въ связи съ симметріей. Наблюдаемое въ послѣдніе года проникновеніе въ физику ученія объ электронахъ вновь возбудило интересъ къ этой области мысли. Однако до сихъ поръ эти воззрѣнія не достигли сколько нибудь яснаго и разработаннаго выраженія и должны пока оставаться за предѣлами текущей научной работы. Все же весьма возможно, что вскорѣ удастся выдѣлить физическія свойства кристалловъ, зависящія отъ правильныхъ, связанныхъ съ симметріей движеній ихъ частицъ отъ тѣхъ наблюдаемыхъ въ нихъ явленій, которыя обусловлены только статическимъ равновѣсіемъ ихъ молекулъ. Въ оптикѣ кристалловъ давно уже приходится допускать такое движеніе эѳира по опредѣленнымъ траекторіямъ,

связаннымъ съ симметріей. Аналогичныя воззрѣнія проникаютъ и въ ученія о движеніи кристаллическихъ частицъ.

145. Имѣютъ ли атомистическія теоріи кристалла реальное основаніе? Отвѣчаютъ ли онѣ дѣйствительности? Могутъ ли служить руководящей нитью для изслѣдованія?—Или мы имѣемъ здѣсь дѣло съ преходящими, чисто теоретическими разработками, представляющими логическій или математическій интересъ, но лишенными физическаго значенія—какъ это наблюдалось постоянно въ исторіи кристаллографіи въ теченіе всего XIX вѣка? Такъ отошли въ область прошедшаго всѣ труды, связанные съ группировками различныхъ поліэдрическихъ частицъ Гаюи, всѣ безконечныя разнообразныя геометрическія схемы послѣдователей формальной кристаллографіи Науманна, ряды Моса, отчасти явленія, связанныя съ ученіемъ зонъ.

Во всякомъ случаѣ до сихъ поръ нѣтъ ни одного факта, который былъ бы выясненъ съ помощью молекулярныхъ теорій, не открыто съ ихъ помощью ни одного новаго явленія. Ихъ приложеніе къ явленіямъ дѣйствительности пока имѣетъ значеніе только иллюстраціи природнаго процесса. Всѣ эти теоріи построены на предположеніи безконечныхъ размѣровъ среды (§ 89), а потому не ясно, возможно ли прилагать ихъ къ явленіямъ, которыя основаны на конечныхъ фигурахъ-многогранникахъ (явленія спайности, ростъ многогранниковъ и т. д.). Въ основу всѣхъ этихъ теорій кладется мысль, что всѣ законности въ кристаллѣ зависятъ только отъ *распредѣленія* его молекулярныхъ массъ, между тѣмъ, какъ въ цѣломъ рядѣ явленій, связанныхъ съ поверхностнымъ натяженіемъ, въ явленіяхъ твердости и т. д. мы встрѣчаемся, повидимому, съ такими случаями, въ которыхъ должно предполагаться *движеніе* молекулярныхъ массъ кристалла и одновременно вліяніе его поверхности, связанное съ неполной его однородностію. Такіе же случаи встрѣчаются при ростѣ, скольженіи и другихъ однородныхъ деформаціяхъ кристаллическаго тѣла, при многихъ явленіяхъ электрическихъ и оптическихъ. Къ ихъ объясненію, молекулярныя теоріи кристалла, разсматривающія кристаллъ какъ безконечную, однородную статическую систему молекулъ или точекъ, по своему характеру и по своимъ предпосылкамъ, безусловно неприложимы.

Точно также, даже въ вопросахъ химическаго состава кристалловъ мы имѣемъ нерѣдко дѣло съ вѣчно подвижными системами

(§ 71), въ которыхъ шагъ за шагомъ съ измѣненіемъ состава мѣняется пространственная рѣшетка кристалла и которыя совершенно не попадаютъ въ область обычныхъ молекулярныхъ теорій. Но какъ указано (§ 134), здѣсь все же при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ, чисто геометрическія молекулярныя теоріи могутъ оказать извѣстную помощь.

Такимъ образомъ, основное положеніе молекулярныхъ теорій— тождество (по крайней мѣрѣ формальное) сцѣпленія, химическаго сродства и тяготѣнія до сихъ поръ не подтверждено фактами; возможность объяснить всѣ явленія въ кристаллѣ, принимая во вниманіе только статическія распредѣленія молекулярныхъ массъ являются лишь гипотезой, фактами не доказанной. Мелкія подраздѣленія 32 строеній на 230 группировокъ и ихъ дальнѣйшее безконечное дробленіе придаютъ теоріямъ усложненіе, лишающее ихъ необходимой для научной работы простоты. Наконецъ, въ наукѣ подымаются вопросы, выходящіе за предѣлы ограниченной этими теоріями области.

Все это заставляетъ меня при изложеніи современнаго состоянія кристаллографіи, оставить въ сторонѣ молекулярныя теоріи;— я буду только указывать отдѣльные ихъ выводы, если они опираются на опытный матеріалъ.

Теорія твердаго тѣла есть дѣло будущаго и едва ли она можетъ обойтись безъ приложенія законовъ движенія.

ГЛАВА IV.

Геометрическія правильности кристаллическихъ многогранниковъ.

146. Законъ постоянства гранныхъ угловъ. Многогранники, которые выражаютъ различныя физическія явленія въ кристаллѣ, (§ 49 сл.) подчиняются общимъ геометрическимъ законамъ. Согласно симметріи, свойственной кристалламъ, количество или роды возможныхъ для кристалла многогранниковъ ограничены, и изъ безчисленнаго множества поліэдровъ геометріи, въ кристаллографіи могутъ встрѣчаться относительно немногіе. Прежде, чѣмъ перейти къ изученію тѣхъ физическихъ явленій, которыя выражаются въ кристаллахъ закономъ многогранника, необходимо ознакомиться въ общихъ чертахъ съ основными правильностями поліэдровъ и съ главными способами ихъ обозначенія и наблюденія. Конечно, согласно общему характеру курса, я остановлюсь здѣсь только на немногихъ важнѣйшихъ законностяхъ и буду имѣть главнымъ образомъ въ виду тѣ явленія, которыя имѣютъ значеніе для объясненія физическихъ или химическихъ свойствъ кристалловъ. Этотъ отдѣлъ геометріи изучался и получилъ широкое развитіе въ значительной степени благодаря трудамъ кристаллографовъ; изложеніе геометрическихъ свойствъ кристаллическихъ поліэдровъ является очень развитымъ и большимъ отдѣломъ нашей науки, служитъ объектомъ такъ-называемой *геометрической кристаллографіи*.

147. Наблюдаемые въ природѣ многогранники почти всегда рѣзко отличаются отъ идеальныхъ тѣлъ геометріи. Мы будемъ брать для изученія только многогранники однородные, состоящіе изъ одного кристалла. Все это многогранники замкнутые, ограниченные плоскими гранями (плоскостями), не заключающіе входящихъ угловъ [1]).

---

[1]) Многочисленные случаи многогранниковъ съ входящими углами всегда со-

Изъ элементовъ многогранника (§ 84) — плоскости, ребра, углы подвергаются въ одномъ и томъ же кристаллическомъ поліэдрѣ чрезвычайнымъ колебаніямъ, нѣкоторые изъ нихъ иногда сходятъ на нѣтъ; ихъ размѣры не одинаковы, ихъ внѣшній видъ различенъ. Такъ, напр., если сравнить геометрическій идеально правильный октаэдръ (рис. 6) съ тѣми тѣлами какія встрѣчаются (Вейсбахъ 1858) при кри-

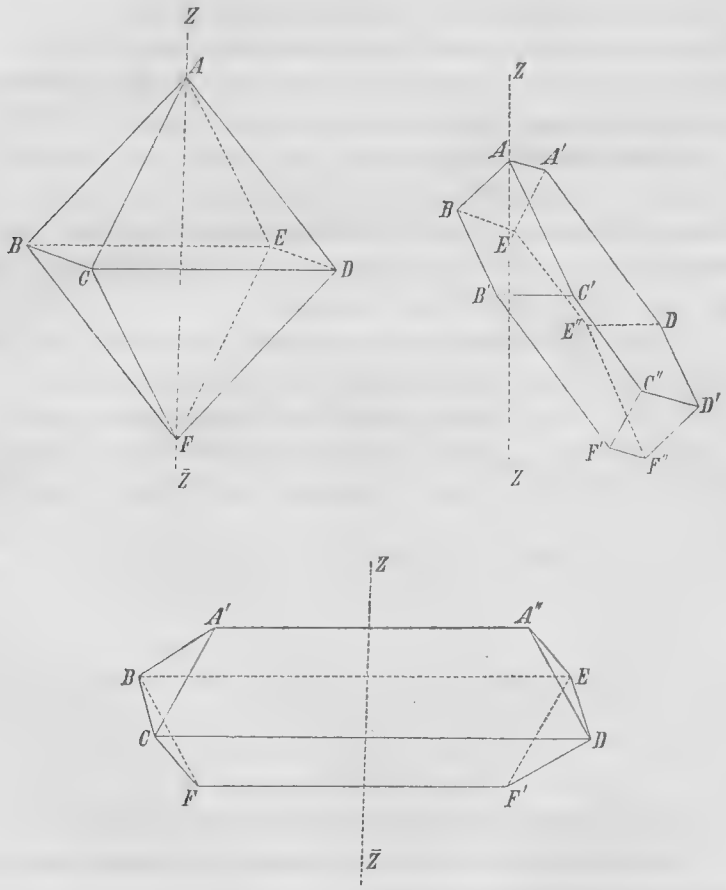


Рис. 25.

сталлизаціи, напр., магнетита $Fe\,Fe_2\,O_4$ (рис. 25 *a—c*), то на первый взглядъ кажется, что между этими тѣлами нѣтъ ничего общаго. Срав-

---

стоятъ изъ нѣсколькихъ кристалловъ, т. е. образуютъ такъ-называемые сростки многогранниковъ (правило Ромэ Делиля. 1783).

нимъ, напр., рис. 25 *b* и рис. 25 *c*, представляющіе одинъ и тотъ же октаэдръ (рис. 25 *a*); здѣсь плоскости ABC (рис. 25 *a*) соотвѣтствуютъ $ABB'C$ (25 *b*) и $A'BC$ (25 *c*), плоскости ACD соотвѣт. $AA'C'C''D'D$ и $A''A'CD$ и т. д. Только измѣреніе гранныхъ угловъ позволяетъ найти между ними нѣкоторое сходство.

Понятно, поэтому, что долгое время такіе многогранники казались рѣзко отличающимися отъ правильныхъ тѣлъ геометріи. Лишь въ XVII столѣтіи—Дависсону, Бартолину и главнымъ образомъ Стенону (§§ 5—9) удалось доказать, что при всѣхъ такихъ измѣненіяхъ *одинъ элементъ многогранника остается неизмѣннымъ.* Этотъ элементъ—*гранные углы.* Только послѣ того, какъ это явленіе было вновь открыто и провѣрено де-Ромэ Делилемъ (§ 15) для всѣхъ кристалловъ, оказалось возможнымъ прилагать къ ихъ изученію законы геометріи. И только со времени этого приложенія законовъ геометріи началась научная кристаллографія.

148. Сохраненіе неизмѣнности гранныхъ угловъ получило названіе *закона постоянства гранныхъ угловъ* или *закона Стенона.* Стенонъ (1669) иллюстрировалъ его на кристаллическихъ многогранникахъ кварца (SiO_2, $\lambda^3 3L^2$). Подбирая различные природные многогранники этого тѣла, онъ замѣтилъ, что несмотря на различную

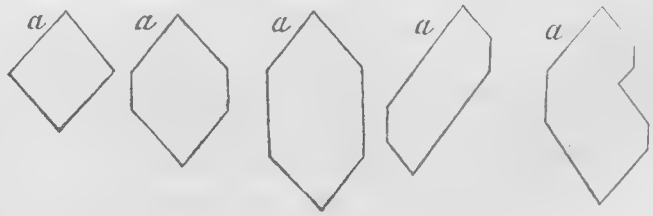


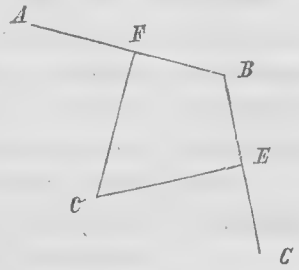
Рис. 26.

ихъ наружную форму, взаимный наклонъ плоскостей не измѣнялся (рис. 26—разрѣзы одинаковыхъ многогранниковъ, параллельно λ^3, по оригинальному рисунку Стенона).

Очевидно, это явленіе могло быть доказана только послѣ того, какъ были изобрѣтены приборы, служащіе для измѣренія гранныхъ угловъ, такъ-называемые *гоніометры* (§ 30). Въ настоящее время въ общемъ можно сказать съ увѣренностію, что въ предѣлахъ ошибокъ опыта, гранные углы въ огромномъ большинствѣ неизмѣнны (при постоянной температурѣ) и тождественны съ гранными углами геоме-

трическихъ тѣлъ. Ихъ колебанія, иногда наблюдаемыя въ кристаллахъ, зависятъ отъ вторичныхъ причинъ и рѣдко достигаютъ 1^0, обыкновенно же не превосходятъ немногихъ минутъ, иногда секундъ или совершенно падаютъ въ предѣлы ошибокъ наблюденія. Поэтому—по сравненію съ рѣзкими колебаніями другихъ элементовъ многогранника—гранные углы могутъ считаться неизмѣнными. Законъ Стенона можетъ быть признанъ за совершенно точный—ибо только *иногда* наблюдаются отъ него отклоненія, и такъ какъ они не существуютъ во многихъ другихъ случаяхъ, то, очевидно, должны вызываться вторичными, возмущающими вліяніями и ихъ изслѣдованіе имѣетъ огромное значеніе для выясненія причины такихъ возмущеній.

149. Такой характеръ гранныхъ угловъ позволяетъ связать ихъ съ внутреннимъ строеніемъ кристалла, т. е. съ его векторами. Для этого, вмѣсто граннаго угла будемъ брать—какъ предложилъ впервые Бернгарди (1809) и провелъ Нейманнъ (1823) (§ 32) уголъ между векторами, перпендикулярными къ сторонамъ граннаго угла. Возьмемъ гранный уголъ между двумя плоскостями AB и BC, уголъ ABC и опустимъ изъ геометрическаго центра — O — поліэдра, перпендикуляры на AB и BC—линіи OE и OF, въ такомъ случаѣ очевидно (рис. 27).



Фиг. 27.

$$ABC = 180^0 - EOF$$

т. е. мы выразимъ гранный уголъ угломъ между нормалями къ его плоскостямъ, т. е. угломъ между векторами кристалла. Такой уголъ является дополненіемъ до 180^0 тѣлеснаго граннаго угла.

Такое обозначеніе закона Стенона сразу дѣлаетъ понятнымъ постоянство этихъ угловъ: очевидно углы между векторами въ однородномъ веществѣ не могутъ мѣняться произвольно. Слѣдовательно наблюдаемое измѣненіе размѣровъ плоскостей, реберъ и т. п.—внѣшней формы поліэдра—должно зависить отъ явленій, связанныхъ съ поверхностію, а не со внутренними частями кристалла.

150. Поэтому, чтобы приложить выводы геометріи къ поліэдрамъ кристаллографіи мы должны замѣнить природные поліэдры такими,

въ которыхъ проявлялась бы неизмѣнность гранныхъ угловъ и возстановлялись бы соотвѣтствующіе размѣры, форма и количество остальныхъ элементовъ многогранника. Мы должны построить *идеальный кристаллическій многогранникъ*, вполнѣ правильный, т. е. такой, въ которомъ однозначные элементы имѣютъ одинаковые размѣры и форму, а величина гранныхъ угловъ соотвѣтствуетъ измѣренію. Въ такомъ тѣлѣ всѣ однозначныя плоскости удалены отъ геометрическаго центра кристалла на одинаковое разстояніе.

Только на такомъ тѣлѣ мы можемъ изучать геометрическія правильности кристаллическихъ поліэдровъ. Этотъ пріемъ былъ введенъ де Ромэ Делилемъ (1783); тогда же, еще въ XVIII столѣтіи, онъ самъ и его ученикъ гр. де Бурнонъ стали изготовлять *кристаллическія модели*, т. е. модели идеальныхъ кристаллическихъ многогранниковъ. На нихъ еще легче изучать геометрію кристалла, чѣмъ на рисункахъ.

Очевидно, этотъ пріемъ изслѣдованія логически вполнѣ правиленъ. Изъ колеблющихся и мѣняющихся признаковъ мы выбираемъ неизмѣнный, общій для кристаллическихъ и геометрическихъ многогранниковъ и принявъ его за исходный, возстанавливаемъ идеальную форму кристаллическаго поліэдра.

Геометрическая кристаллографія изучаетъ законы только такихъ идеальныхъ кристаллическихъ многогранниковъ.

151. Необходимо обратить вниманіе еще на одно слѣдствіе изъ закона Стенона. Такъ какъ въ кристалическихъ многогранникахъ имѣютъ значеніе только гранные углы, т. е. взаимное расположеніе плоскостей кристалла, то, очевидно, что параллельныя между собою плоскости могутъ быть разсматриваемы, какъ плоскости идентичныя; конечно, это возможно только тогда, когда онѣ находятся по одну сторону отъ геометрическаго центра кристаллическаго многогранника. Мы знаемъ (§ 52), что вслѣдствіе однородности, каждый многогранникъ — при извѣстныхъ условіяхъ—можетъ быть полученъ въ формѣ меньшихъ многогранниковъ той же формы—слѣдовательно, при этомъ всякая его плоскость займетъ по отношенію къ центру новое положеніе въ пространствѣ, параллельное прежнему положенію той же его плоскости. При ростѣ кристалла (см.) изъ растворовъ кристаллъ постепенно увеличивается, сохраняя неизмѣннымъ наклонъ плоскостей, т. е. каждая плоскость его какъ бы перемѣщается въ пространствѣ параллельно самой себѣ. Очевидно,

благодаря такому свойству кристаллическихъ плоскостей намъ нѣтъ надобности точно знать ихъ положеніе въ многогранникѣ по отношенію къ его центру или по отношенію къ какимъ нибудь другимъ предметамъ въ пространствѣ, а важно только знать ея положеніе по отношенію къ другимъ плоскостямъ поліэдра. Слѣдовательно, *можно перемѣщать каждую плоскость кристаллическаго многогранника параллельно самой себѣ безъ нарушенія правильности его строенія.*

152. Параметры и индексы кристаллическихъ плоскостей. Для опредѣленія взаимнаго положенія плоскостей кристаллическаго многогранника, т. е. его граныхъ угловъ мы должны прибѣгнуть къ обозначенію ихъ съ помощью координатныхъ осей; какъ уже было указано (§ 122), эти координатныя оси мы будемъ выбирать въ тѣсной зависимости отъ симметріи.

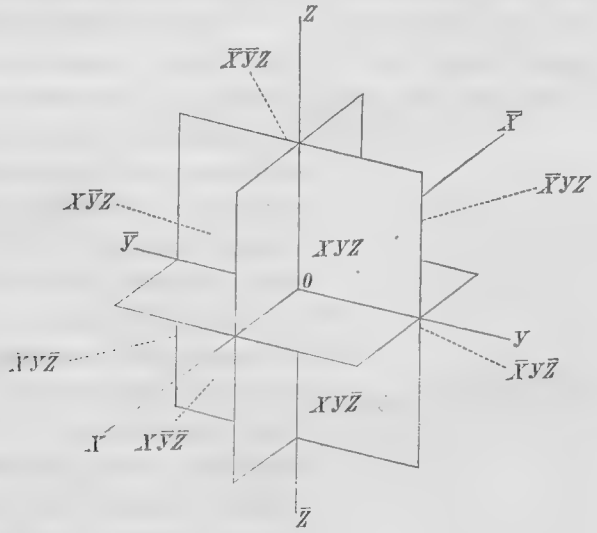


Рис. 28.

Возьмемъ (рис. 28) систему трехъ координатныхъ осей X, Y, Z (§ 122) и перенесемъ ее въ геометрическій центръ идеальнаго кристаллическаго многогранника. Такъ расположенныя оси называются *координатными осями кристалла.* При чемъ всегда ось X обращена къ наблюдателю, Y ему параллельна и Z стоитъ вертикально. Плоскости, проведенныя черезъ эти оси называются *плоскостями координатъ* XOZ, XOY, YOZ—а общая точка ихъ пересѣченія—

O — началомъ координатъ. Начало координатъ совпадаетъ съ центромъ поліэдра.

Назовемъ отрѣзки координатныхъ осей, идущіе вправо, вверхъ и впередъ отъ начала координатъ *положительными*, а идущіе отъ этой точки влѣво, внизъ и назадъ *отрицательными.* Для обозначенія отрицательнаго отрѣзка будемъ писать знакъ «—» надъ символомъ оси, напр. $\overline{X}$ есть отрицательная часть оси X и т. д.; въ такомъ случаѣ символъ оси безъ знака наверху будетъ обозначать положительный отрѣзокъ оси, напр. X—значитъ положительный отрѣзокъ оси X—*овъ.*

Благодаря такому обозначенію все пространство, весь многогранникъ распадется на восемь частей, отличающихся по знаку координатныхъ осей. Эти части мы будемъ называть *октантами.* Слѣдовательно, могутъ существовать слѣдующіе октанты XYZ, $\overline{X}YZ$, $X\overline{Y}Z$, $XY\overline{Z}$, $\overline{X}\overline{Y}Z$, $\overline{X}Y\overline{Z}$, $X\overline{Y}\overline{Z}$, $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$. При обозначеніи октантовъ мы всегда будемъ писать оси въ извѣстномъ порядкѣ: на первомъ мѣстѣ ось X—*овъ*, на второмъ ось Y—*овъ*, на третьемъ ось Z—*овъ.*

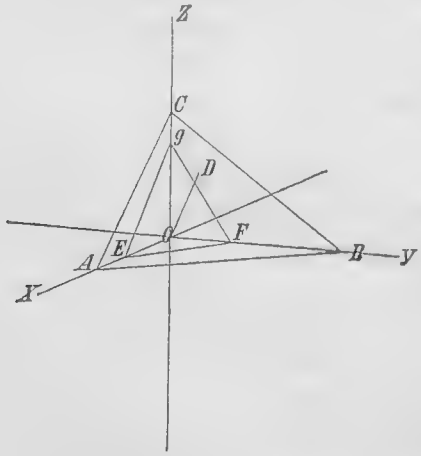


Рис. 29.

Съ помощью такихъ октантовъ, очевидно, мы сразу можемъ оріентироваться, въ какой части кристалла находится тотъ или иной изъ элементовъ многогранника.

Пользуясь этимъ понятіемъ, мы можемъ точнѣе опредѣлить, какія параллельныя плоскости мы считаемъ идентичными (§ 151). Очевидно, различныя параллельныя положенія одной и той же плоскости въ одномъ и томъ же октантѣ идентичны, т. е. съ кристаллографической точки зрѣнія это одна и таже плоскость.

153. Съ помощью такой системы координатныхъ осей можно легко опредѣлить положеніе каждой плоскости кристалла въ пространствѣ. Для этого употребляются общіе пріемы аналитической геометріи, но они претерпѣли

нѣкоторыя измѣненія примѣнительно къ вопросамъ, какіе затрагиваются въ кристаллографіи.

Возьмемъ въ октантѣ XYZ какую-нибудь плоскость кристалла ABC, которая даетъ на координатныхъ осяхъ отрѣзки OA, OB, OC. Отрѣзки, которые она дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ, называются *параметрами плоскости*, при чемъ $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ (рис. 29).

Для опредѣленія положенія плоскости въ пространствѣ удобнѣе пользоваться (§ 149) векторами кристалла, къ ней перпендикулярными. Поэтому опустимъ на плоскость ABC изъ O перпендикуляръ OD; его положеніе опредѣлится изъ положенія линіи OD по отношенію къ координатнымъ осямъ X, Y и Z. Очевидно

$$\left.\begin{array}{lll} Cos\ DX, \text{ т.-е. } & DOA = \dfrac{OD}{OA} \\ Cos\ DY \quad \text{»} & DOB = \dfrac{OD}{OB} \\ Cos\ DZ \quad \text{»} & DOC = \dfrac{OD}{OC} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Откуда, мы имѣемъ:

$$OD = a.Cos\ DX = b.Cos\ DY = c.Cos\ DZ \ldots \quad (2)$$

Это равенство вполнѣ опредѣляетъ положеніе въ пространствѣ вектора OD, выраженнаго въ связи съ параметрами плоскости, а слѣдовательно и положеніе плоскости.

154. Очевидно, для всякой другой кристаллической плоскости того же кристалла можно получить аналогичное равенство. Такъ, напримѣръ, плоскость EFg будетъ имѣть параметры OE, OF и Og. Такъ какъ мы можетъ всегда передвигать всякую плоскость параллельно самой себѣ въ предѣлахъ октанта (§ 151), то понятно, что можно всегда передвинуть эту плоскость такъ, чтобы $EF = \frac{1}{h}.OA$, $OF = \frac{1}{k}.OB$ и $OG = \frac{1}{l}.OC$.

Тогда и для ея вектора OJ, очевидно будетъ существовать равенство:

$$OJ = \frac{a}{h}.Cos\ JX = \frac{b}{k}.Cos\ JY = \frac{c}{l}.Cos\ JZ \ldots \quad (3)$$

Само собою понятно, что этимъ путемъ, можетъ быть выражена и всякая другая плоскость многогранника и для ея вектора можетъ быть получено уравненіе, аналогичное (3), напр. для какой-нибудь плоскости съ нормалью OR:

$$OR = \frac{a}{h'} . Cos\ RX = \frac{b}{k'} . Cos\ RY = \frac{c}{l'} . Cos\ RZ.$$

Очевидно здѣсь $\frac{a}{h'}$, $\frac{b}{k'}$, $\frac{c}{l'}$ составляютъ параметры данной плоскости на разныхъ осяхъ, а углы RX и т. д.—углы образуемые векторомъ, перпендикулярнымъ къ плоскости съ векторами, принятыми за координарныя оси.

155. Пользуясь этими уравненіями нормалей, легко можно выразить каждую плоскость сокращеннымъ символомъ; такое сокращенное обозначеніе плоскости мы будемъ называть ея *индексомъ*. Для этого будемъ брать знаменатели параметровъ плоскости (т. е. *характеристики* индекса) въ простыя скобки и писать ихъ въ извѣстномъ, опредѣленномъ порядкѣ: сперва знаменатель по оси X, потомъ знаменатель по оси Y, потомъ по Z, напр. для плоскости EFG получимъ индексъ (hkl), для другой $(h'k'l')$ и т. д.

Числителемъ параметра всякой плоскости является параметръ какой нибудь одной грани, выбранной за плоскость сравненія. Параметры этой плоскости называются *кристаллическими осями*. Эту плоскость мы будетъ называть *основной* плоскостью и, какъ увидимъ, въ каждой системѣ можно выбирать ее опредѣленнымъ образомъ, въ связи съ симметріей. Очевидно, и для основной плоскости можно написать индексъ — это будетъ (111), такъ какъ ея параметры равны кристаллическимъ осямъ и слѣдовательно ихъ знаменатели равны 1. Такимъ образомъ *индексъ (111) всегда будетъ обозначать основную плоскость кристалла.*

156. Такъ какъ весь кристаллъ дѣлится на октанты (§ 151), то и индексы плоскостей разныхъ октантовъ отличаются знаками, такъ напр. плоскости, лежащія въ октантѣ XYZ имѣютъ всегда всѣ знаки индекса положительными, плоскости октанта $X\bar{Y}Z$ всегда имѣютъ знакъ «—» надъ числомъ въ индексѣ по оси Y — напр. $(\bar{1}11)$, $(h\bar{k}l)$, $(h_1\bar{k}_1l_1)$.

Такъ какъ всѣ параллельныя плоскости въ одномъ и томъ же октантѣ для кристаллическаго многогранника идентичны, какъ бы

сливаются въ одну плоскость (§ 151), то, конечно, одинъ и тотъ же индексъ будетъ обозначать всѣ параллельныя плоскости въ октантѣ, напр. (111) всѣ параллельныя положенія основной плоскости и т. д.; съ другой стороны одинъ и тотъ же индексъ не можетъ обозначать различныя не параллельныя плоскости октанта.

Различныя плоскости кристалла можно раздѣлить на: 1) пересѣкающія всѣ координатныя оси и 2) плоскости, которыя пересѣкаютъ не всѣ координатныя оси.

Въ послѣднемъ случаѣ ихъ параметры по соотвѣтственной оси, которой онѣ параллельны, равны ∞ (такъ какъ двѣ параллельныхъ линіи пересѣкутся на безконечно большомъ разстояніи). Разъ параметръ равенъ ∞, то въ индексѣ на соотвѣтственномъ мѣстѣ должно стоять O, такъ какъ всякая величина, дѣленная на O равна ∞. Такъ напр. (100) — обозначаетъ плоскость параллельную осямъ Y и Z и т. д.

157. Во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ называть 1) *пирамидальными* плоскостями плоскости, пересѣкающія всѣ координатныя оси; ихъ индексы будутъ (hkl), (111), (pqr) и т. д., 2a) *призматическими* плоскостями—плоскости, параллельныя оси Z и пересѣкающія всѣ другія оси — напр. (hkO), $(p\bar{q}O)$, и т. д., 2b) *доматическими*—плоскости, которыя параллельны X или Y и пересѣкаютъ остальныя — напр. (hOl), (Okl), $(Oh\bar{l})$ и т. д. и наконецъ 4) *пинакоидальными*—плоскости, которыя параллельны двумъ координатнымъ осямъ, напр. (010), (100) и т. д.

Очевидно, никакихъ другихъ плоскостей въ многогранникѣ быть не можетъ.

Такимъ образомъ, пользуясь этими обозначеніями, можно сказать, что за *основную* плоскость (§ 155) принимается одна изъ пирамидальныхъ плоскостей, а ея параметры служатъ *кристаллическими осями*.

За *координатныя плоскости* принимаются пинакоидальныя плоскости, такъ какъ очевидно только такія плоскости будутъ проходить чрезъ оси X, Y, Z; т. е. будутъ имъ параллельны, отсюда мы имѣемъ для плоскости XY индексы (001) и $(00\bar{1})$, для XZ—(010) и $(0\bar{1}0)$, для YZ — (100) и $(\bar{1}00)$.

158. Изъ множества разнообразныхъ системъ обозначеній кристаллическихъ плоскостей въ концѣ концовъ пріобрѣло наибольшее

распространеніе обозначеніе индексами, извѣстное подъ именемъ *обозначенія Миллера*. Однако, еще до сихъ поръ отдѣльные изслѣдователи употребляютъ различные другіе—болѣе громоздкіе—способы, главнымъ образомъ обозначенія Вейсса (1815), Леви (1837), Науманна (1824) и др. Эти обозначенія не имѣютъ никакихъ преимуществъ и ихъ употребленіе обусловлено исторически-сложившимися привычками ученыхъ разныхъ государствъ, такъ обозначеніе Леви господствовало во Франціи, Науманна — въ Германіи и Австріи, главнымъ образомъ въ связи со школой Моса и т. д. [1]). Я буду употреблять исключительно обозначеніе Миллера. Основные принципы обозначенія индексами были даны Нейманомъ (1821) и приведены въ болѣе ясный видъ Уэвелемъ (1825) и Грассманномъ (1829). Однако, они получили нѣкоторое развитіе только послѣ того, какъ Миллеръ (1839) приложилъ ихъ въ Кембриджѣ къ систематическому изложенію кристаллографіи (§ 18). Съ тѣхъ поръ это обозначеніе было распространено главнымъ образомъ среди ученыхъ Англіи и Соединенныхъ Штатовъ. Въ серединѣ 1850-хъ годовъ Грайлихъ и ф. Лангъ въ Вѣнѣ и де-Сенармонъ въ Парижѣ въ переводахъ кристаллографіи Миллера ознакомили ближе съ этимъ обозначеніемъ ученыхъ Европейскаго континента. Съ тѣхъ поръ оно проникало въ употребленіе медленно, постепенно вытѣсняя другіе пріемы. Принятіе его Малляромъ во Франціи, Гротомъ и Либишемъ въ Германіи, введеніе его въ главные научные журналы по кристаллографіи начиная съ конца 1870-хъ годовъ, мало-по-малу привело къ его окончательному торжеству. Къ серединѣ 1890-хъ годовъ остались только отдѣльные, немногіе ученые по рутинѣ или привычкѣ пользующіеся другими методами обозначенія. Само собою разумѣется принятіе единообразнаго языка символовъ въ значительной степени сокращаетъ работу, которая тратится на совершенно непроизводительное ознакомленіе съ языками изслѣдователей.

159. Это обозначеніе индексами находится въ очень простомъ отношеніи съ уравненіемъ плоскости въ аналитической геометріи.

---

[1]) См. таблицу разныхъ обозначеній въ концѣ книги. Она необходима для пониманія нѣкоторыхъ современныхъ работъ и огромной старинной литературы.

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что уравненіе какой-нибудь плоскости можетъ быть выражено въ формѣ:

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1 \ldots . \quad (1)$$

Приведя въ эту форму уравненіе *основной* плоскости (§ 155) мы получимъ:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \ldots . \quad (2)$$

отсюда, очевидно, для *координатныхъ плоскостей* (§ 157), мы имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{для } (001) & x=0 \text{ и } y=0, & \text{слѣдовательно} & z=c \\ \text{» } (100) & y=0 \text{ и } z=0, & \text{»} & x=a \\ \text{» } (010) & x=0 \text{ и } z=0, & \text{»} & y=b \end{array}\right\} \ldots . \quad (3)$$

Эти уравненія координатныхъ плоскостей такимъ образомъ опредѣляютъ кристаллическую ячейку (§ 65), образованную параметрами, равными кристаллическимъ осямъ — a, b, c.

Такимъ образомъ *величина кристаллическихъ осей соотвѣтствуетъ величинѣ параметровъ кристаллической ячейки* и, зная кристаллическія оси легко можно построить кристаллическую ячейку. Такъ какъ абсолютная величина параметровъ плоскости не имѣетъ для насъ значенія (ибо можно свободно, любымъ образомъ передвигать плоскость параллельно самой себѣ въ предѣлахъ октанта—§ 152), а имѣетъ значеніе лишь ихъ отношеніе, то величина кристаллической ячейки выражается *отношеніемъ кристаллическихъ осей* $= a : b : c$, при чемъ всегда на первомъ мѣстѣ пишется кристаллическая ось по X, затѣмъ по Y и по Z.

Съ кристаллическими осями находится въ тѣсной связи индексъ плоскости (§ 155). Подставимъ его въ уравненіе (2) мы получимъ

$$\left.\begin{array}{l} \text{для } (h\ k\ l): \quad h.\ \frac{x}{a}+k\frac{y}{b}+l\frac{z}{c}=1 \\ \text{для } (h'\ k'\ l'): \quad h'.\frac{x}{a}+k'\frac{y}{b}+l'\frac{z}{c}=1 \end{array}\right. \quad (4)$$

Такая простая связь чиселъ индекса съ уравненіемъ плоскости чрезвычайно важна для упрощенія различныхъ кристаллическихъ вычисленій на основаніи извѣстныхъ для нихъ тѣла индексовъ.

160. До сихъ поръ мы имѣли дѣло съ тремя координатными осями. Но для *гексагональной системы* (§ 126) удобнѣе принять

четыре координатныхъ оси—X, Y, U и Z (рис. 30). Изъ этихъ осей ось Z (за которую принимается всегда λ^3) перпендикулярна къ осямъ X, Y и U, дѣлающимъ между собою углы въ 120°. Соотвѣтственно черезъ 120° располагаются также ихъ положительные и

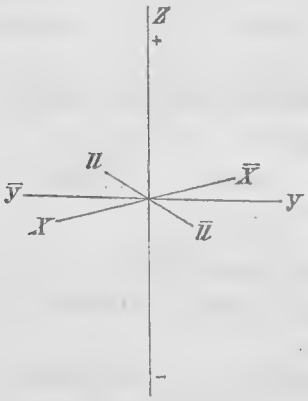


Рис. 30.

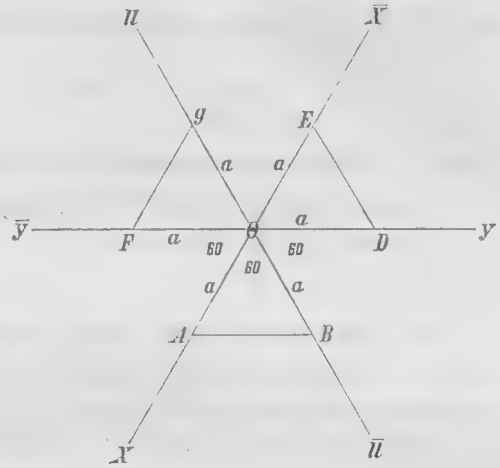


Рис. 31.

отрицательные отрѣзки. При обозначеніи тѣла четырьмя осями на первомъ мѣстѣ помѣщается ось X, затѣмъ Y, U и Z (¹). Одна изъ плоскостей кристалла выбирается и здѣсь за *основную* (§ 154) и съ ея параметрами сравниваются параметры остальныхъ. За основную принимается плоскость, дѣлающая равные отрѣзки по двумъ рядомъ лежащимъ боковымъ осямъ; очевидно, вслѣдствіе свойствъ шестиугольника, такая плоскость непремѣнно параллельна третьей оси (напр., AB—рис. 31), слѣдовательно параметры ABC будутъ:

$$a : \infty : -a : c.$$

Но такъ какъ три боковыхъ оси (X, Y и U) въ гексагональной сист., вслѣдствіе существованія λ^3 (оси Z) всегда идентичны, то совершенно безразлично какой изъ осей параллельна основная плоскость; можно принять за нее DEC съ параметрами $-a : a : \infty : c$ или CgF съ параметрами $\infty : -a : a : c$ и т. д. Другими словами можетъ быть принята за основную любая изъ трехъ неизбѣжно

¹) Это обозначеніе Бравэ. Расположеніе осей у Вейсса, Либиша и др. было иное.

идентичныхъ плоскостей: $(10\bar{1}1)$, $(\bar{1}101)$ или $(0\bar{1}11)$. Такъ какъ могутъ быть случаи, когда плоскости многогранника пересѣкаютъ всѣ координатныя оси, то можно принять, что въ этой системѣ *кристаллическія оси* $= a : a : a : c$ или $1 : 1 : 1 : \frac{c}{a}$.

Въ гексагональной системѣ, подобно другимъ системамъ (§ 157), различаются плоскости: 1) *пирамидальныя*, которыя пересѣкаютъ всѣ координатныя оси, напр. $(h\ i\ \bar{k}\ l)$, 2) *призматическія*, параллельныя только оси Z, напр., $(h\ i\ \bar{k}\ 0)$, 3) *доматическія* — параллельныя одной изъ боковыхъ осей, напр. $(10\bar{1}1)$, $(01\bar{1}1)$ и т. д. и 4) *пинакоидальныя*, параллельныя по крайней мѣрѣ двумъ координатнымъ осямъ—напр. $(10\bar{1}0)$, (0001) и т. д.

Координатныя плоскости имѣютъ индексы, соотвѣтствующіе пинакоидальнымъ плоскостямъ; это будутъ: (0001) или $(000\bar{1})$, $(10\bar{1}0)$ или $(\bar{1}010)$, $(1\bar{1}00)$ или $(\bar{1}100)$ и наконецъ $(01\bar{1}0)$ или $(0\bar{1}10)$.

162. Съ геометрической точки зрѣнія четвертая координатная ось излишня, т. к. положеніе плоскости въ пространствѣ вполнѣ опредѣляется отрѣзками по тремъ осямъ. Можно ожидать, поэтому, что введенный лишній параметръ по четвертой оси долженъ находиться въ простомъ отношеніи къ параметрамъ по двумъ другимъ осямъ; тоже самое, очевидно, существуетъ и для характеристикъ индекса. Конечно, такое отношеніе можетъ существовать только для боковыхъ осей, т. е. только для того случая, когда больше двухъ координатныхъ осей лежитъ въ одной плоскости. При этомъ надо имѣть въ виду, что одна характеристика индекса по этимъ осямъ непремѣнно должна быть *иного знака*, чѣмъ другія. Это само собою вытекаетъ изъ того, что положительные и отрицательные отрѣзки по боковымъ осямъ чередуются черезъ 60^0.

Связь между характеристиками индекса (resp. параметрами) по осямъ X, Y и U выразится для плоскости $(h\ k\ \bar{i}\ l)$ слѣдующимъ простымъ уравненіемъ:

$$h + k + i = 0.$$

Это положеніе въ общей формѣ доказывается въ аналитической геометріи и оно вѣрно для всякого угла между координатными осями, но въ гексагональной системѣ этотъ уголъ равенъ 60^0 и я здѣсь

приведу болѣе простое доказательство этого равенства для частнаго случая координатныхъ осей гексагональной системы.

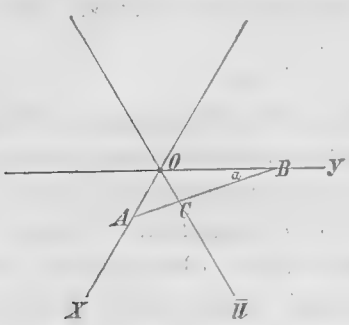


Рис. 32.

Пусть какая нибудь плоскость кристаллическаго многогранника—ABC—$(h\,k\,\bar{i}\,l)$—пересѣкаетъ координатныя оси X, Y и U (рис. 32) въ параметрахъ $OA\left(=\frac{1}{h}\right)$, $OB\left(=\frac{1}{k}\right)$ и $OC\left(=-\frac{1}{i}\right)$ обозначимъ уголъ $OBA=\alpha$. Въ такомъ случаѣ изъ треугольниковъ OBA и OBC, мы имѣемъ:

$$(1)\ \ldots\ldots\ \frac{OB}{OA}=\frac{h}{k}=\frac{Sin\ (60-\alpha)}{Sin\ \alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ Cos\ \alpha-\frac{1}{2}Sin\alpha}{Sin\ \alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\,Cot\,\alpha-\frac{1}{2}$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ \frac{OB}{OC}=-\frac{i}{k}=\frac{Sin\,(60+\alpha)}{Sin\,\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ Cos\ \alpha+\frac{1}{2}Sin\,\alpha}{Sin\ \alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\,Cot\,\alpha+\frac{1}{2}$$

Отсюда, вычтя уравненіе (2) изъ уравненія (1), получимъ:

$$(3)\ \ldots\ \frac{h+i}{k}=-\ 1 \text{ или } h+i+k=0.$$

Такимъ образомъ, одна изъ характеристикъ индекса въ гексагональной системѣ зависитъ отъ двухъ другихъ и можетъ быть найдена, зная эти двѣ другія. Для построенія пространственной рѣшетки соотвѣтственный параметръ не нуженъ; рѣшетка строится на осяхъ X, Y, Z.

163. Зоны или пояса. Обратимся теперь къ законамъ распредѣленія плоскостей въ кристаллическомъ многогранникѣ. Вейссъ (1804) впервые замѣтилъ, что плоскости такого многогранника обыкновенно образуютъ въ немъ параллельныя ребра и располагаются, какъ бы поясами; этимъ путемъ, оставаясь параллельными одной и той же линіи, онѣ ограничиваютъ многогранникъ. Такое явленіе наблюдается нерѣдко и въ геометрическихъ многогранникахъ — но въ кристаллическихъ поліэдрахъ оно наблюдается всегда.

Совокупность плоскостей, параллельныхъ одной и той же линіи была названа Вейссомъ *зоною* или *поясомъ*, а линія, которой параллельны всѣ эти плоскости *осью зонъ*; плоскости принадлежащія къ одной и той же зонѣ называются *тавтозональными*. Такъ, напр., въ кристаллическомъ многогранникѣ ортоклаза (рис. 33) (строеніе λ^2 *c* π), состоящемъ изъ призматическихъ, пинакоидальныхъ и доматическихъ плоскостей мы имѣемъ слѣдующія зоны: *TTM*, *o TP*, *n P n M*, *xy P* и т. д. Между уравненіями плоскостей, принадлежащихъ къ одной зонѣ, неизбѣжно должны существовать простыя соотношенія. Ибо ось зоны параллельна ребрамъ, полученнымъ отъ взаимнаго пересѣченія плоскостей зоны, а линіи пересѣченія двухъ плоскостей должны выражаться уравненіями обѣихъ плоскостей, т. к. онѣ лежатъ одновременно въ нихъ обѣихъ. Ибо вслѣдствіе свойствъ кристаллическаго многогранника (§ 152) параллельныя между собою плоскости идентичны. То же самое должно быть, конечно, правильно и по отношенію къ параллельнымъ между собою линіямъ: съ точки зрѣнія кристаллическаго многогранника онѣ также идентичны; если онѣ лежатъ въ одномъ и томъ же октантѣ (§ 156)—онѣ будутъ имѣть одинаковое обозначеніе; если принадлежатъ къ разнымъ октантамъ ихъ обозначеніе будетъ отличаться только знаками + и —. Слѣдовательно для кристаллографическаго многогранника всѣ параллельныя ребра совпадутъ съ осью зонъ.

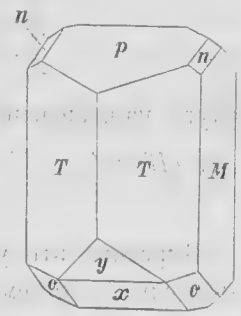


Рис. 33.

Отсюда слѣдуетъ, что ось зонъ должна удовлетворять уравненіямъ всѣхъ плоскостей кристаллическаго многогранника, которыя принадлежатъ къ одной и той же зонѣ. При подвижности кристаллическихъ плоскостей (§ 151) ось зоны можетъ какъ бы лежать во всѣхъ такихъ плоскостяхъ.

Ось зонъ можно выразить въ знакахъ—*индексахъ зоны* — которые могутъ быть выведены изъ индексовъ ея плоскостей. Для нѣкоторыхъ свойствъ кристаллическій поліэдръ можетъ быть замѣненъ пучкомъ линій (осей зонъ), перенесенныхъ въ центръ поліэдра и выраженныхъ въ индексахъ зонъ, связанныхъ съ индексами составляющихъ его плоскостей.

164. Выведемъ отношенія между индексами плоскостей и осей ихъ зонъ.

Изъ опредѣленія зоны слѣдуетъ, что всѣ принадлежащія къ ней плоскости пересѣкаются по параллельнымъ линіямъ. Выразимъ это условіе аналитически. Изъ аналитической геометріи извѣстно, что въ общемъ случаѣ три какихъ-нибудь плоскости

$$\left.\begin{array}{l} A\ x + B\ y + C\ z + D = 0 \\ A'\ x + B'\ y + C'\ z + D' = 0 \\ A''\ x + B''\ y + C''\ z + D'' = 0 \end{array}\right\} (1)$$

будутъ параллельны одной и той же прямой, если

$$A\ (B'\ C'' - C'\ B'') + B\ (A'\ C'' - C'\ A'') + C\ (A'\ B'' - B'\ A'') = 0 \quad \ldots . \quad (2)$$

Выразимъ эти уравненія въ знакахъ индексовъ (§ 159). Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\begin{array}{l} h\ \dfrac{x}{a} + k\ \dfrac{y}{b} + l\ \dfrac{z}{c} = 1 \\ h'\ \dfrac{x}{a} + k'\ \dfrac{y}{b} + l'\ \dfrac{z}{c} = 1 \quad \ldots \quad (3) \\ h''\ \dfrac{x}{a} + k''\ \dfrac{y}{e} + l''\ \dfrac{z}{c} = 1 \end{array}$$

Подставляя во (2) соотвѣтствующія выраженія изъ (3) вмѣсто A, A', B и т. д. [1]), мы имѣемъ слѣдующее *условіе зоны*, т. е. параллельности данныхъ плоскостей, выраженное въ индексахъ:

$$h\,(k'\ l'' - l'\ k'') + k\,(h'\ l'' - l'\ h'') + l\,(h'\ k'' - k'\ h'') = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

Положивъ
$$\begin{array}{l} k'\ l'' - l'\ k'' = u \\ h'\ l'' - l'\ h'' = v \\ h'\ k'' - k'\ h'' = w, \end{array}$$

Получимъ:

$$hu + kv + lw = 0 \quad \ldots . \quad (5)$$

Эти три числа — u, v, w — характеризуютъ зону, составленную изъ плоскостей $(h'\ k'\ l')$, $(h''\ k''\ l'')$, $(h\ k\ l)$ и всякая другая плоскость, напр. $(p\ q\ r)$—будетъ лежать въ той же зонѣ, если удовлетворяется такое же уравненіе: $pu + qv + rw = 0$.

---

[1]) Очевидно $A = \dfrac{h}{a}$, $B = \dfrac{k}{b}$, $A' = \dfrac{h'}{a}$ и т. д.

Итакъ для опредѣленія зоны достаточно чиселъ (u, v, w,). Эти три числа (характеристики) мы будемъ брать за большія скобки [ ], писать всегда въ неизмѣнномъ порядкѣ $u\ v\ w$ и называть *индексомъ зоны* [$u\ v\ w$] [1]).

165. Мы можемъ легко получить индексъ зоны изъ индексовъ плоскостей ея, если употребимъ слѣдующій пріемъ. Напишемъ индексы обѣихъ плоскостей входящихъ въ зону два раза подъ рядъ, зачеркнемъ крайніе ряды и перемноживъ накрестъ остальные члены, возьмемъ ихъ разности. Т. е. для $(h'\ k'\ l')$ и $(h''\ k''\ l'')$:

$$\begin{array}{c|cccc|c} h' & k' & l' & h' & k' & l' \\ & & \times & \times & \times & \\ h'' & k'' & l'' & h'' & k'' & l'' \end{array} \text{ — откуда}$$

$$u = k'\ l'' - l'\ k''$$
$$v = l'\ h'' - h'\ l''$$
$$w = h'\ k'' - k'\ h''.$$

Такимъ образомъ изъ индексовъ двухъ плоскостей легко опредѣляется *индексъ зоны*, т. е. положеніе линіи, параллельной даннымъ плоскостямъ, т. е. ихъ ребра (§ 163). Ребрами пересѣченія координатныхъ плоскостей будутъ координатныя оси. Соотвѣтственно для оси X (пересѣченіе (001) и (010)), имѣемъ:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & \times & \times & \times & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \text{ т. е.}$$

$$u = 0.0 - 1.1 = \bar{1}$$
$$v = 1.0 - 0.0 = 0$$
$$w = 0.1 - 0.0 = 0, \text{ т.е. } [\bar{1}00] \text{ или } [100]$$

если возьмемъ $(00\bar{1})$ § 164).

Точно также для оси Y получимъ [010] и для оси Z [001].

Слѣдовательно *индексы координатныхъ осей* выразятся: [100], [010] и [001].

---

[1]) Вмѣсто индекса [$u\ v\ w$] можно писать въ тѣхъ же скобкахъ просто индексы двухъ плоскостей, принадлежащихъ къ зонѣ. Изъ нихъ (§ 165) легко можно получить [$u\ v\ w$]. Напр., вмѣсто [$u\ v\ w$] писать [$h\ k\ l,\ h'\ k'\ l'$] и т. д.

Для *основной плоскости* (111), индексы ея реберъ съ координатными плоскостями будутъ: $\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & \times & \times & \times & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} = [\bar{1}10]$ и соотвѣтственно [101] и [011] и т. д.

166. До сихъ поръ мы не обращали вниманія на углы, которые дѣлаютъ между собою кристаллическія плоскости. Но на нихъ необходимо остановиться, ибо гранные углы подчинены опредѣленнымъ законамъ, рѣзко отдѣляющимъ кристаллическіе многогранники отъ прочихъ тѣлъ геометріи.

Мы видѣли, что комплексъ плоскостей кристаллическаго многогранника можетъ быть замѣненъ пучкомъ векторовъ — перпендикулярныхъ къ этимъ плоскостямъ (§ 149). Такимъ же пучкомъ векторовъ можетъ быть замѣненъ кристаллическій многогранникъ и въ томъ случаѣ, когда примутъ во вниманіе только существующіе въ немъ оси зонъ. Ось зоны будетъ векторомъ и кристаллъ замѣнится пучкомъ такихъ векторовъ, исходящихъ изъ центра. Среди множества геометрически возможныхъ пучковъ линій, въ кристаллическихъ многогранникахъ могутъ существовать только нѣкоторые немногіе пучки векторовъ.

Относящіяся сюда правильности были давно выведены кристаллографами и геометрами, изучавшими свойства пучковъ линій. Уже въ 1829 году Ю. Грассманнъ примѣнилъ къ кристаллографіи геометрическія ученія о свойствахъ пучковъ прямыхъ линій и этимъ придалъ изложенію геометрической кристаллографіи Вейсса болѣе простой и изящный видъ; однако его работы были совершенно забыты. Онъ впервые вывелъ законности, которыя неправильно до сихъ поръ приписываются Гауссу (1831) и Миллеру (1839). Почти одновременно въ работахъ Нейманна, Гаусса, Гесселя и Миллера видимъ мы болѣе или менѣе самостоятельное развитіе тѣхъ же взглядовъ, причемъ уже Грассманнъ (1829) разработалъ вопросъ объ угловыхъ величинахъ векторовъ. Позднѣе относящіяся сюда геометрическія законности кристаллическихъ поліэдровъ были подробно изучены Мебіусомъ, В. ф.-Лангомъ (1866), Либишемъ (1881), Стори Маскелайномъ (1895) и др.

167. Я остановлюсь здѣсь только на немногихъ главнѣйшихъ относящихся сюда явленіяхъ.

Изъ геометріи извѣстно, что если четыре прямыя (лучи) одного пучка, лежащія въ одной и той же плоскости пересѣчь пятой прямой, то отрѣзки, образуемые на ней остальными лучами пучка относятся между собою, какъ синусы угловъ образованныхъ тѣми же лучами пучка. Пусть въ точкѣ O сходятся четыре прямыхъ OA, OB, OC и OD (рис. 34). Пересѣчемъ ихъ еще одной прямой AD; въ такомъ случаѣ:

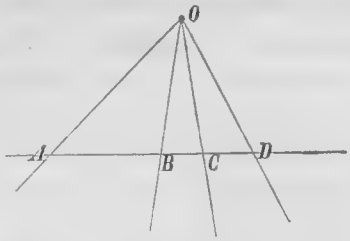


Рис. 34.

$$\frac{AB}{AC} : \frac{BD}{CD} = \frac{Sin\ AOB}{Sin\ AOC} : \frac{Sin\ BOD}{Sin\ COD}$$

или
$$\frac{AB.\ CD}{AC.\ BD} = \frac{Sin\ AOB.\ Sin\ COD}{Sin\ AOC.\ Sin\ BOD} \quad . \ . \ . \ (1)$$

Это отношеніе синусовъ есть для даннаго пучка нѣкоторая *постоянная величина*, независящая отъ положенія въ немъ сѣкущей. Само собою разумѣется всякая новая сѣкущая даетъ отрѣзки, которые будутъ удовлетворять тому же уравненію.

Среди всѣхъ различныхъ случаевъ пучковъ—одинъ имѣетъ особыя свойства, именно тотъ, въ которыхъ $\frac{Sin\ AOB.\ Sin\ COD}{Sin\ AOC.\ Sin\ BOD} = -1$.

Въ этомъ случаѣ уголъ AOD дѣлится прямыми такъ, что синусы составляемыхъ ими угловъ находятся въ одинаковыхъ отношеніяхъ. Такой пучекъ называется *гармоническимъ пучкомъ*. Отношенія же синусовъ всѣхъ остальныхъ пучковъ называются *ангармоническими* или *сложными отношеніями*.

168. Обратимъ вниманіе на то, что представляютъ съ кристаллографической точки зрѣнія отрѣзки AB, BC и т. д., входящіе въ составъ ангармоническаго отношенія. Очевидно, ихъ значеніе будетъ мѣняться въ завимости отъ того, какіе векторы кристалла входятъ въ составъ пучка.

Наиболѣе важное значеніе имѣетъ изученіе пучка, образованнаго въ кристаллическомъ многогранникѣ слѣдами его плоскостей на координатной плоскости. Въ такомъ случаѣ (рис. 35), напр. на плоскости XY (т. е. 001) даютъ слѣдъ всѣ плоскости кристалла, ей не параллельныя. Эти всѣ плоскости на основаніи основного закона Стенона

(§ 151) могутъ быть передвинуты такъ, что слѣды ихъ всѣхъ на (001) будутъ проходить черезъ одну точку, напр., *P*. Въ такомъ случаѣ ихъ параметры на оси *X* или *Y* должны отвѣчать ангармоническому отношенію и *отрѣзки AB, BC и т. д. ангармоническаго отношенія* (§ 167) *являются параметрами кристаллической плоскости.*

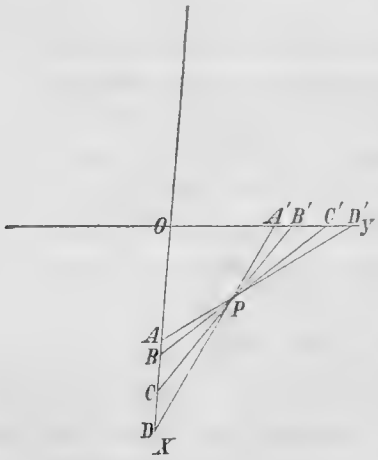


Рис. 35.

Изъ этого важнаго вывода неизбѣжно проистекаетъ, что нѣкоторыя отношенія между параметрами плоскости, выражаемыя ангармоническимъ отношеніемъ, не мѣняются, какія бы координатныя оси мы ни выбрали. Особенно это важно для правильнаго пониманія всѣхъ чиселъ параметровъ (а слѣдовательно и индексовъ) и кристаллическихъ осей въ системахъ моноклинической или триклинической, гдѣ положеніе координатныхъ осей (§ 123) измѣнчиво. Отъ выбора тѣхъ или иныхъ осей зонъ за координатныя оси въ этихъ системахъ ангармоническое отношеніе параметровъ плоскостей не мѣняется [1]).

Такимъ образомъ отношенія параметровъ находятся въ связи съ синусами угловъ между прямыми пучка. Какіе же это углы? Очевидно, всѣ безъ исключенія плоскости многогранника даютъ параметры, т. е. оставляютъ слѣдъ на координатной плоскости (если только онѣ не параллельны ей); слѣдовательно въ нашъ пучекъ, какъ мы его ранѣе опредѣлили, входятъ всѣ грани кристалла. Среди этихъ плоскостей остановимся сперва на тѣхъ, которыя перпендикулярны къ данной координатной плоскости, т. е. къ (001). Очевидно всѣ эти плоскости принадлежатъ къ одной и той же зонѣ, т. к. всѣ плоскости, перпендикулярныя къ одной и той же плоскости, пере-

---

[1]) Мы увидимъ ниже, что это ангармоническое отношеніе параметровъ (resp. индексовъ) находится въ тѣсной связи съ закономъ параметровъ (§ 175), съ раціональностію индексовъ плоскости. Независимость раціональности индекса отъ того или иного выбора координатныхъ осей впервые была доказана для кристаллическаго поліэдра Купфферомъ (1826) и позднѣе связана со свойствами пучковъ Миллеромъ.

сѣкаются между собою въ параллельныхъ линіяхъ, т. е. принадлежатъ къ одной и той же зонѣ. Ось такой зоны перпендикулярна къ (001) и для всѣхъ системъ, кромѣ моноклинической и триклинической имѣетъ индексъ [001] (§ 164).

Для такихъ плоскостей углы между ихъ слѣдами на (001) равняются граннымъ угламъ между плоскостями [1]) и слѣдовательно для нихъ мы получаемъ простое соотношеніе между параметрами (resp. индексами) плоскостей и синусами гранныхъ угловъ между этими плоскостями, т. е. здѣсь мы имѣемъ (если $OA = a$, $BO = a_1$, $OC = a_2$, $OD = a_3$).

$$\frac{(a_1 - a)\ (a_3 - a_2)}{(a_2 - a)\ (a_3 - a_1)} = \frac{Sin\ AOB.\ Sin\ DOC}{Sin\ AOC.\ Sin\ BOD} = Const.$$

Я не буду входить въ дальнѣйшій анализъ этого уравненія и выводить связанныя съ нимъ геометрическія правильности. Для нашихъ цѣлей важно только отмѣтить, что величины гранныхъ угловъ находятся въ опредѣленномъ отношеніи къ параметрамъ, какую бы координатную ось мы ни выбрали. Они также просто связаны съ индексами [2]).

Аналогичныя уравненія, очевидно, будутъ существовать и для плоскостей, принадлежащихъ къ зонамъ, не перпендикулярнымъ къ (001); очевидно ихъ гранные углы будутъ отличаться отъ угловъ, образуемыхъ слѣдами плоскостей на (001) въ зависимости отъ наклона ихъ оси зонъ къ (001), но все же и при этомъ двойныя отношенія синусовъ не измѣнятся и ангармоническое отношеніе останется нерушимымъ и соотвѣтствующимъ тому, которое получится, если вмѣсто синусовъ данныхъ угловъ подставить синусы гранныхъ угловъ между тѣми же плоскостями. Надо конечно, только брать плоскости одной и той же зоны, слѣды которыхъ даютъ одинъ пучекъ.

Такимъ образомъ *параметры плоскостей (или синусы ихъ гранныхъ угловъ), принадлежащихъ къ одной и той же зонѣ находятся между*

---

[1]) Такъ какъ гранные углы мѣряются въ плоскости, перпендикулярной къ ребру граней, а здѣсь эта плоскость совпадаетъ съ (001).

[2]) Примемъ a за кристаллическую ось, т. е. $\frac{a}{1}$, тогда $a_2 = \frac{a}{h_2}$, $a_3 = \frac{a}{h_3}$ и $a_1 = \frac{a}{h_1}$; откуда: $\frac{Sin\ AOB.\ Sin\ DOC}{Sin\ AOC.\ Sin\ BOD} = \frac{(1 - h_1)\ (h_2 - h_3)}{(1 - h_2)\ (h_1 - h_3)}$

собою въ отношеніи, соотвѣтствующемъ ангармоническому отношенію одного и того же пучка прямыхъ.

169. **Законъ параметровъ.** Всѣ до сихъ поръ разсмотрѣнныя правильности — параметры, индексы плоскостей, зоны и индексы осей зонъ, наконецъ ангармоническія отношенія отрѣзковъ—существуютъ для всѣхъ многогранниковъ безъ исключенія, а не характеризуютъ только кристаллическіе многогранники. Но есть нѣкоторыя явленія, которыя рѣзко отдѣляютъ кристаллическіе поліэдры отъ прочихъ тѣлъ геометріи. Относящіяся сюда явленія сдѣлались впервые извѣстны въ серединѣ XVIII столѣтія. Въ это время выдающійся французскій химикъ Руэлль опубликовалъ (1744 — 1745) рядъ наблюденій надъ кристаллизаціей поваренной соли — NaCl— въ которыхъ доказалъ, что большіе многогранники этой соли нерѣдко состоятъ изъ правильнымъ образомъ расположеныхъ рядовъ кубиковъ, мелкихъ субиндивидовъ, того же вещества. Такіе сростки— tremies (воронки), какъ ихъ назвалъ Руэлль—образуются благодаря тому, что мелкіе кубики сростаются по извѣстнымъ законамъ, при чемъ при ростѣ кристалла въ новыхъ его слояхъ, количество ихъ убываетъ очень правильно. Напр., на квадратной грани куба ростъ идетъ такъ, что въ каждомъ слоѣ одинъ рядъ по краямъ не заполняется веществомъ, каждый новый слой образуетъ меньшій квадратъ и т. д., и въ концѣ концовъ на верху находится всего одинъ кубикъ. Сростки плаваютъ въ растворѣ, при чемъ на поверхности раствора находится широкое основаніе такого сложнаго сростка. Въ концѣ концовъ получается опредѣленная геометрическая фигура—пирамида — сложенная изъ параллельно расположенныхъ въ пространствѣ кубиковъ. Стороны ея шероховаты, покрыты углубленіями; однако, чѣмъ меньше элементарные кубики и чѣмъ больше ихъ заключается въ каждомъ слоѣ, строящемъ пирамиду, тѣмъ правильнѣе получаемая геометрическая фигура и тѣмъ менѣе замѣтны несовершенства ея плоскостей (рис. 36).

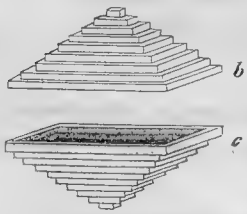


Рис. 36.

Руэлль не докончилъ своихъ опытовъ и не сдѣлалъ того вывода, который логически истекалъ изъ его взглядовъ на строеніе кристалла. Онъ не обратилъ вниманія на то, что получаемыя указаннымъ имъ путемъ кажущіяся гладкими плоскости

поліэдра должны находиться въ опредѣленномъ математическомъ отношеніи къ геометрической формѣ слагающихъ его мельчайшихъ элементарныхъ многогранниковъ. Но въ исторіи науки блестящія экспериментальныя лекціи Руэлля не прошли безслѣдно и его работы и идеи цитировались, не были забыты въ теченіе всего XVIII столѣтія. Выводъ, который онъ не сдѣлалъ, къ концу столѣтія былъ сдѣланъ въ несовершенной формѣ Бергманномъ (1779) и почти одновременно ясно и опредѣленно Гаюи (1782—1784). Бергманнъ исходилъ изъ ромбоэдра спайности кальцита (§ 54) и доказывалъ, что другія наблюдаемыя въ томъ же веществѣ формы могутъ быть выведены изъ его ромбоэдра спайности. Но онъ неясно понималъ связь кристаллической структуры съ химическимъ составомъ и сдѣлалъ рядъ математическихъ сближеній, не отвѣчающихъ дѣйствительности, т. к. выводилъ изъ того же ромбоэдра кальцита многогранники веществъ, не имѣющихъ ничего общаго съ $CaCO_3$. Только Гаюи первый сдѣлалъ правильный выводъ изъ этихъ наблюденій и, развивъ идеи Руэлля, далъ въ образной формѣ ясное выраженіе того основного закона кристаллографіи, которому мы придаемъ теперь названіе *закона параметровъ*.

170. Гаюи (§ 16) исходилъ изъ теоретическихъ воззрѣній на кристаллъ, какъ на сростокъ мельчайшихъ поліэдровъ спайности. Эти поліэдры—основные многогранники Гаюи—имѣютъ опредѣленную простую геометрическую форму и расположены въ пространствѣ строго параллельно другъ другу. Почти всѣ плоскости кристаллическаго поліэдра являются плоскостями касательными къ этимъ многогранникамъ и только кажутся гладкими и блестящими. Въ дѣйствительности онѣ шероховаты, вслѣдствіе выходящихъ на нихъ промежутковъ между мельчайшими элементарными поліэдрами. Новыя плоскости получаются путемъ недорастанія, путемъ уменьшенія количества мельчайшихъ, составляющихъ кристаллъ, поліэдровъ—согласно извѣстнымъ, опредѣленнымъ законамъ. Такъ, напр., получается ромбическій додекаэдръ (рис. 4) каменной соли изъ сростка, составленнаго мельчайшими кубиками того же вещества (рис. 37—38). Для каждаго вещества форма строющихъ его элементарныхъ многогранниковъ своя особенная и находится въ тѣсной связи съ его атомнымъ строеніемъ.

Я не буду дальше останавливаться на разборѣ теоріи Гаюи, давно всѣми оставленной. Укажу только на два его вывода, которые теперь называются *закономъ параметровъ*. Изъ теоріи Гаюи непосредственно слѣдуетъ, что для одного и того же химиче-

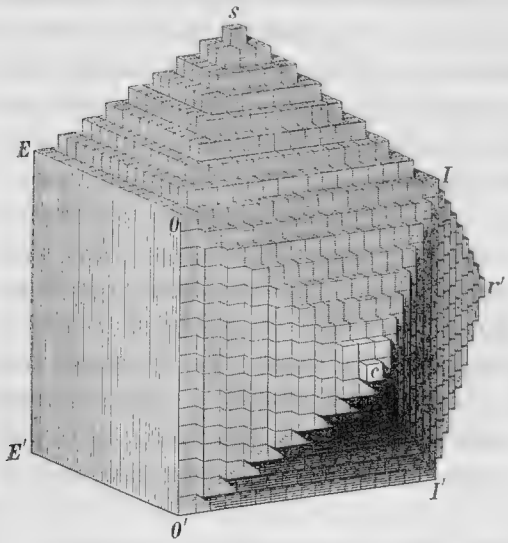


Рис. 37.

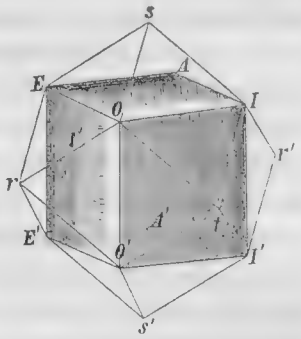


Рис. 38.

скаго вещества всѣ плоскости его многогранниковъ отсѣкаютъ на ребрахъ основного параллелипипеда отрѣзки, которые относятся между собою, какъ *раціональныя числа*, ибо въ каждомъ такомъ отрѣзкѣ должно заключаться цѣлое число разъ одно и тоже ребро (или сѣченіе) основного поліэдра, неизмѣннаго для даннаго химическаго вещества. Изучая природные кристаллы Гаюи пришелъ къ другому еще болѣе любопытному обобщенію, а именно къ тому, что *эти отношенія не только раціональны, но и выражаются обыкновенно очень небольшими числами*. Этотъ свой эмпирическій выводъ Гаюи выразилъ такъ, что въ Природѣ наблюдается немного разныхъ законовъ убыванія (недорастанія) элементарныхъ многогранниковъ, въ опредѣленной зависимости отъ формы этихъ послѣднихъ, т. е. въ правильномъ отношеніи къ ихъ ребрамъ, къ діагоналямъ граней и т. д.

171. Эти выводы Гаюи удобнѣе перевести намъ въ ту форму, какую они имѣютъ въ настоящее время. Это было сдѣлано много

позже, въ началѣ XIX столѣтія—сперва Малюсомъ (1809) и позже Вейссомъ (1814).

Открытая Гаюи законность, какъ показали эти изслѣдователи, совершенно не зависитъ отъ его теоретическихъ воззрѣній. Она можетъ быть выражена въ видѣ слѣдующаго *закона параметровъ или закона Гаюи*: Параметры кристаллическихъ плоскостей на идентичныхъ [1]) координатныхъ осяхъ для одного и того же химическаго соединенія представляютъ изъ себя величины всегда раціональныя и обыкновенно небольшія.

Еще проще тотъ же законъ можетъ быть выраженъ *для индексовъ*. Для нихъ можно его выразить такъ: Характеристики индексовъ одного и того же химическаго соединенія представляютъ числа раціональныя, простыя и обыкновенно небольшія. Въ огромномъ большинствѣ случаевъ онѣ не больше 2—3, рѣже до 6, т. е. равны 1, 2, 3, 4, 5, 6 (соотвѣтственно—1,—2 и т. д.).

Какъ слѣдствіе изъ этого закона, всѣ обозначенія и геометрическія свойства плоскостей многогранника, выведенныя въ предыдущихъ §§ принимаютъ совершенно иное значеніе. Благодаря существованію опредѣленныхъ числовыхъ соотношеній, кристаллическіе многогранники рѣзко выдѣляются среди поліэдровъ геометріи, для которыхъ такая законность въ общемъ случаѣ не существуетъ. Мы увидимъ ниже (§ 175), что въ законѣ Гаюи уже заключается, неизбѣжно предполагается ограниченность элементовъ симметріи кристалла и слѣдовательно онъ является другимъ выраженіемъ выведеннаго, въ §§ 91 сл., отличія кристаллическихъ многогранниковъ отъ тѣлъ геометріи.

Уже Гаюи замѣтилъ, что этотъ законъ удерживается только для многогранниковъ одного и того же химическаго соединенія [2])—т. е. обусловливается свойствами химической молекулы кристалла. Благодаря этому можно характеризовать каждое химическое тѣло только величиною и формою его ячейки, которая составлена кристаллическими осями (§ 159); параметры всѣхъ другихъ плоскостей того же химическаго соединенія будутъ находиться въ разнообразныхъ, но всегда въ простыхъ отношеніяхъ съ кристаллическими осями. Какъ

---

[1]) Ср. § 44.

[2]) Исключеніе представляютъ тѣла правильной системы, въ которыхъ нѣтъ мѣста проявленію вліянія химическаго состава (§ 126).

примѣръ можно привести, напр., кристаллъ сѣры (рис. 39). Для нея ($3\lambda^2$ c 3π), отношеніе кристаллическихъ осей (§ 159) равно 0.813 : 1 : 1.904, а на данномъ кристаллическомъ многогранникѣ наблюдаются плоскости $p=\{001\}$, $b^3=\{113\}$, $b^1=\{111\}$, $m=\{110\}$, $e^2=\{011\}$; ихъ отношенія извѣстны, если только извѣстна ячейка сѣры т. е. для b^3, оси $b:c=1:0.635$ и т. д.

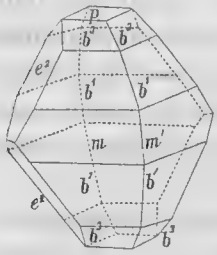


Рис. 39.

172. Уже изъ подчиненія индексовъ плоскостей закону Гаюи неизбѣжно слѣдуетъ, что онъ вѣренъ и для индексовъ осей зонъ (§ 164); и для нихъ существуютъ простыя и раціональныя, цѣлыя величины характеристикъ. Отсюда слѣдуетъ, что такъ или иначе этотъ законъ долженъ проявляться въ явленіи зонъ. Проявленіе его было открыто въ началѣ XIX столѣтія Вейссомъ, думавшемъ сперва, что онъ открылъ новый законъ кристаллографіи, пока Нейманнъ въ 1826 г. и немного позже (1827) Мебіусъ не свели его на ранѣе извѣстный законъ Гаюи.

Вейссъ (1804—1806) замѣтилъ, что въ кристаллѣ всѣ плоскости располагаются въ поясахъ и на основаніи этого эмпирическаго обобщенія онъ вывелъ «законъ», что для даннаго химическаго вещества возможны только такія плоскости, которыя связаны между собою въ зоны. Очевидно индексы такихъ плоскостей должны удовлетворять уравненію зонъ (§ 164).

Легко, однако, убѣдиться, какъ показалъ Мебіусъ (1827), что всегда всѣ плоскости, характеристики индексовъ которыхъ раціональны, связаны между собою въ зоны, а слѣдовательно «законъ» Вейсса есть лишь иное выраженіе закона Гаюи. Доказательство это вытекаетъ напр. изъ слѣдующихъ соображеній.

Для даннаго кристаллическаго тѣла всегда существуютъ оси зонъ, соотвѣтствующія координатнымъ осямъ—[001], [010], [100]. Существованіе этихъ осей зонъ вызываетъ принадлежность къ нимъ всѣхъ призматическихъ и доматическихъ плоскостей, обладающихъ раціональными характеристиками въ индексѣ, т. е. ($h0l$), ($0kl$), ($hk0$), т. к. онѣ удовлетворяютъ уравненію (§ 164), указывающему условія принадлежности плоскости къ данной зонѣ, такъ напр. ($h0l$) принадлежитъ къ зонѣ [010], ибо:

$$h.0 + 1.0 + l0 = 0 \text{ и т д.}$$

Эти плоскости образуютъ на координатныхъ (пинакоидальныхъ) плоскостяхъ ребра (= оси зонъ) — $[0lk]$, $[l0h]$, $[kh0]$, такъ напр., $(hk0)$ съ (001) опредѣляетъ ось зоны $[\bar{k}h0]$, ибо:

$$\begin{array}{c|cccc|c} h & k & 0 & h & k & 0 \\ & \times & \times & \times & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} = [kh0] \text{ и т. д.}$$

Но всякая пирамидальная плоскость (hkl) въ свою очередь неизбѣжно опредѣляется этими осями зонъ, т. е. лежитъ въ нихъ, такъ, напр. (hkl) и $[kh0]$; ибо

$$h.k - h.k + l.0 = 0 \text{ и т. д.}$$

Никакихъ другихъ плоскостей въ кристаллѣ быть не можетъ (§ 157). Слѣдовательно, всѣ плоскости съ раціональными индексами будутъ всегда располагаться между собою въ зонахъ. Поэтому, законъ Гаюи implicite предполагаетъ ту законность расположенія плоскостей, которую много позже замѣтилъ Вейссъ.

173. Этотъ законъ можетъ быть выраженъ еще многими другими путями, но среди нихъ наибольшее значеніе имѣетъ его выраженіе въ формѣ ангармоническаго отношенія, впервые выведенное Грассманномъ (1829), но независимо отъ него найденное Гауссомъ и введенное въ кристаллографію въ современной формѣ Миллеромъ (1839). Это выраженіе важно потому, что оно сразу связываетъ возможную для даннаго химическаго соединенія величину гранныхъ угловъ съ раціональностію его параметровъ. Изъ той формы, какая придана этому отношенію въ § 167, непосредственно слѣдуетъ, что $\frac{Sin\ AOB.\ Sin\ BOD}{Sin\ COD.\ Sin\ AOC} = A$, причемъ A есть всегда нѣкоторая *раціональная величина*, ибо величины синусовъ находятся, какъ видно въ § 168, въ простомъ отношеніи къ параметрамъ. Въ этомъ заключается рѣзкое отличіе кристаллическихъ многогранниковъ отъ поліэдровъ геометріи, которые даже проявляя зональную связь плоскостей, могутъ давать ангармоническія *ирраціональныя* отношенія для пучка плоскостей зоны.

Слѣдовательно нѣкоторыя комбинаціи гранныхъ угловъ невозможны въ кристаллическихъ многогранникахъ, т. к., очевидно, далеко не всегда двойныя отношенія синусовъ дадутъ раціональную величину. Какъ увидимъ (§ 175) на этомъ основаніи можно дока-

зать невозможность въ кристаллѣ осей симметріи, мыслимыхъ въ геометрическихъ многогранникахъ.

174. Законъ Гаюи въ основѣ своей явился чисто эмпирическимъ закономъ. Уже Гаюи попытался вывести его, исходя изъ своей молекулярной теоріи строенія кристалла и съ тѣхъ поръ эти попытки продолжаются непрерывно. Несомнѣнно онъ одинаково легко выводится изъ всѣхъ молекулярныхъ теорій. Однако, этотъ выводъ касается только—*раціональности* параметровъ и въ значительной степени совершенно не зависитъ отъ тѣхъ или иныхъ воззрѣній на строеніе кристалла. Основанія его лежатъ гораздо глубже и совершенно не связаны съ какими бы то ни было молекулярными представленіями; онѣ вообще не связаны ни съ какими гипотезами. Раціональность параметровъ (также какъ теорема Гесселя — Франкенгейма объ осяхъ симметріи—§ 91 сл.) является слѣдствіемъ того, что двѣ точки кристалла (какъ и всякаго вещества) не могутъ быть приближены на безконечно близкое разстояніе; другими словами раціональность параметровъ есть слѣдствіе неуничтожаемости матеріи, какую бы структуру (атомистическую или динамическую) мы ей ни придавали (ср. § 134). Въ самомъ дѣлѣ параметры ряда гомологическихъ точекъ суть величины конечныя, опредѣленныя и неизмѣнныя и въ параллельныхъ рядахъ всегда одинаковы (§ 65). Отсюда слѣдуетъ, что для всякаго химическаго соединенія отрѣзки плоскостей, наблюдаемыхъ въ данномъ веществѣ, всегда по параллельнымъ направленіямъ (т. е. на рядахъ съ одинаковыми параметрами) будутъ величинами раціональными. Эта раціональность отношеній параметровъ плоскостей для одного и того же химическаго соединенія является другимъ выраженіемъ строенія кристалла изъ пространственныхъ рѣшетокъ, слѣдовательно не связана съ какими бы то ни было гипотетическими представленіями.

175. Можно убѣдиться въ этомъ, если обратиться къ болѣе тщательному анализу выраженія закона параметра въ формѣ ангармоническаго отношенія (§ 173). Если

$$\frac{Sin\ AOB.\ Sin\ COD}{Sin\ BOD.\ Sin\ AOC} = A$$

есть величина раціональная, то, очевидно, что въ кристаллѣ могутъ находиться въ одной и той же зонѣ плоскости далеко не со всякими

гранными углами, т. к. для нѣкоторыхъ гранныхъ угловъ вышеприведенныя комбинаціи синусовъ дадутъ для A величину ирраціональную. Исходя изъ этихъ соображеній можно доказать, что въ кристаллѣ не мыслима напр. L^5, которая требуетъ (для призматическихъ и доматическихъ плоскостей) нахожденія пяти граней въ одной зонѣ (пучкѣ), пересѣкающихся подъ одинаковымъ угломъ, т. е. подъ угломъ 36° (рис. 40). Очевидно, ангармоническое отношеніе синусовъ, когда всѣ они будутъ равны, можетъ быть выражено въ формѣ $\frac{Sin\ ^2\varphi}{Sin\ ^2 2\varphi}$; въ данномъ случаѣ $\varphi = 36^0$. Это отношеніе для 36° ирраціональное и равно: $\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$ — [1]).

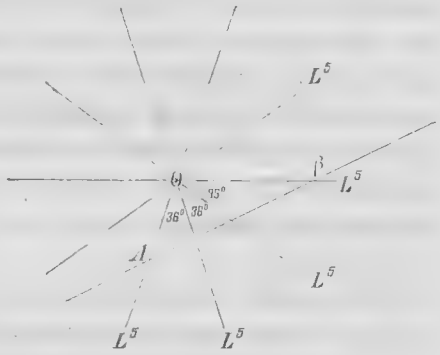


Рис. 40.

Точно также отношеніе $\frac{Sin\ ^2\varphi}{Sin\ ^2 2\varphi}$, которое должно быть раціонально для L^n, будетъ такимъ только тогда, когда $\varphi = 90^0$, 45^0, 60^0 и 30^0 — т. е. когда $n = 2, 4, 3$ и 6. Никакіе другіе углы не будутъ удовлетворять этому уравненію, т. е. никакія другія оси симметріи не могутъ наблюдаться въ кристаллѣ, ибо всякая ось симметріи n-го порядка требуетъ одновременнаго существованія одинаково къ ней наклоненныхъ n плоскостей, въ какихъ бы зонахъ мы ихъ ни брали; для призматическихъ же или доматическихъ граней эти n плоскостей должны лежать въ одной зонѣ, т. е. дѣлать между собою одинаковые углы.

Такимъ образомъ исходя изъ раціональности ангармоническаго отношенія четырехъ тавтозональныхъ плоскостей можно вывести теорему Гесселя - Франкенгейма, т. е. опредѣлить возможные въ кри-

---

[1]) Это равенство можетъ быть выведено, если подставить соотвѣтственныя величины для $Sin\ 36^0$ и $Sin\ 72^0$. Изъ тригонометріи извѣстно, что $Sin\ 36^0 = Sin\ \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $Sin\ 72^0 = Sin\ \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

сталлѣ L^n. Раціональность параметровъ является какъ бы слѣдствіемъ возможныхъ въ кристаллѣ элементовъ симметріи или обратно законы симметріи кристалла являются какъ бы слѣдствіемъ раціональности его параметровъ. Однако, такой выводъ будетъ неправиленъ. И раціональность параметровъ и ограниченность элементовъ симметріи въ кристаллѣ служатъ выраженіемъ одной и той же болѣе глубокой причины—неуничтожаемости матеріи, неизбѣжности конечныхъ разстояній между гомологическими точками. Они кажутся только различными проявленіями одного и того же основного чисто опытнаго обобщенія [1]).

176. Другое заключеніе закона Гаюи—простота параметровъ или характеристикъ индекса—отнюдь не связана такъ просто съ явленіями симметріи или съ тѣми основными принципами, которые лежатъ въ основаніи нашихъ воззрѣній на кристаллъ. Оно указываетъ на новыя законности и выходитъ за предѣлы принятыхъ нами во вниманіе положеній. Гаюи не высказалъ это обобщеніе вполнѣ точно. Въ своей работѣ онъ до извѣстной степени шелъ ощупью, исходилъ изъ телеологическихъ соображеній—но уже матеріалъ, накопленный имъ и въ его время, съ несомнѣнностью доказывалъ правильность его обобщенія. Съ тѣхъ поръ въ теченіе болѣе чѣмъ столѣтія этого обобщеніе Гаюи только подтверждалось и мы можемъ сказать въ настоящее время, что для огромнаго большинства кристаллическихъ многогранниковъ индексы наблюдаемыхъ плоскостей, имѣютъ чрезвычайно простыя характеристики, большею частію не выше 2—3; рѣдко онѣ превышаютъ 6.

Такая простота характеристикъ или параметровъ въ основѣ своей остается для насъ простымъ результатомъ наблюденія. Мы увидимъ ниже (§ 190 сл.), что эта часть закона Гаюи можетъ быть геометрически выражена нѣсколько болѣе строго и среди возможныхъ раціональныхъ параметровъ или характеристикъ нѣкоторыя являются болѣе обычными, чѣмъ другіе. До извѣстной степени это явленіе

---

[1]) Можно, слѣдовательно, утверждать, что implicite въ законѣ Гаюи уже заключалось все ученіе симметріи и оно могло бы быть тогда же найдено правильной дедукціи. Но исторія науки шла долгимъ кружнымъ путемъ. Изъ старинныхъ кристаллографовъ теоретиковъ одинъ Миллеръ повидимому тогда же (еще въ 1830-хъ годахъ) сознавалъ эти слѣдствія закона Гаюи. Ходъ мысли Гесселя (1830) былъ тѣсно связанъ съ анализомъ закона Гаюи.

можетъ быть объяснено, исходя изъ векторіальности молекулярныхъ силъ кристалла. Но предварительно необходимо ознакомиться еще съ однимъ явленіемъ, зависящимъ отъ симметріи, съ т. наз. простыми формами.

177. Простыя формы. При изученіи геометрическихъ свойствъ кристаллическаго многогранника имѣетъ наибольшее значеніе проявленіе въ нихъ законовъ симметріи, т. к. явленія симметріи охватываютъ *всѣ* физическія свойства кристалловъ, какими бы законами (фигурами въ пространствѣ) онѣ ни выражались. Проявленія симметріи на формѣ кристаллическихъ многогранниковъ были замѣчены много раньше, чѣмъ выяснены ея законы. Уже Дависсону (§ 6) было извѣстно, что нѣкоторыя плоскости кристалла всегда появляются и исчезаютъ въ многогранникѣ вмѣстѣ, а выдѣленныя отдѣльно образуютъ особый, болѣе простой многогранникъ. При возрожденіи кристаллографіи въ XVIII вѣкѣ эти идеи проявляются у Деместа, Ромэ Делиля; наконецъ Гаюи (1815) высказываетъ ихъ въ ясной и опредѣленной формѣ. Эти идеи были позже развиты и тщательно обработаны главнымъ образомъ Мосомъ и его учениками, особенно Науманномъ, но не въ связи съ симметріей, а на почвѣ натурфилософскихъ воззрѣній, основыванныхъ на увѣренности, что правильности, наблюдаемыя въ природѣ выражаются по возможности въ простыхъ численныхъ соотношеніяхъ. Мосу даже удалось этимъ путемъ сдѣлать нѣкоторыя открытія, напримѣръ доказать возможность многогранниковъ строенія $3\lambda^2\ 4L^3$ (1824), много лѣтъ позже дѣйствительно открытыхъ (1855) (§ 201).

Но только послѣ работъ Гесселя и Бравэ, послѣ проникновенія въ кристаллографію ученія о симметріи, эти правильности получили свое окончательное выраженіе.

178. Разсматривая какой нибудь кристаллическій многогранникъ можно различать въ немъ плоскости, связанныя между собою элементами симметріи, свойственными тѣлу и плоскости другъ отъ друга независимыя. Такъ, напр., въ кристаллѣ (рис. 41) плавика (CaF_2), голоэдріи правильной системы, далеко не всѣ плоскости неизбѣжно должны встрѣчаться вмѣстѣ согласно свойственной этому тѣлу симметріи. Такъ плоскости, обозначенныя буквою *a*, должны всегда являться вмѣстѣ, ибо это необходимо истекаетъ изъ существованія въ многогранникѣ соотвѣтственныхъ элементовъ сим-

метріи: — $3\lambda^4$ $4L^3$ $6L^2c$ 3π $6P$. Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ какую нибудь изъ такихъ плоскостей, напр. (100). Вслѣдствіе существованія въ тѣлѣ c—необходимо должна появиться параллельная ей плоскость $(\bar{1}00)$. Ось Z (λ^4) требуетъ повторенія (100) четыре раза въ пространствѣ, т. е. вызываетъ существованіе въ многогранникѣ (010), $(\bar{1}00)$ и $(0\bar{1}0)$; ось Y (λ^4)—связываетъ (100) съ (001), $(\bar{1}00)$ и $(00\bar{1})$.

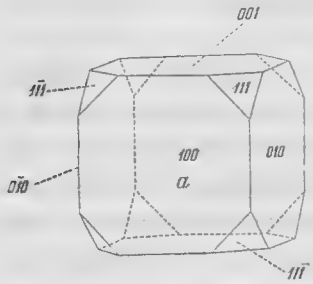


Рис. 41.

Такимъ образомъ въ этомъ строеніи, плоскости (100), $(\bar{1}00)$, (001), $(00\bar{1})$, (010) и $(0\bar{1}0)$ всегда должны встрѣчаться вмѣстѣ, такъ какъ ихъ существованіе является выраженіемъ симметріи кристаллической структуры. Легко убѣдиться, что всѣ другіе элементы симметріи строенія вызываютъ связь только между этими же 6-ю плоскостями поліэдра, но не требуютъ появленія въ немъ какой нибудь новой плоскости, такъ напр., ось X (λ^4), какъ перпендикулярная къ (100), не связываетъ ее ни съ какой другой гранью. Ось симметріи 3-го порядка, лежащая въ октантѣ XYZ связываетъ (100) съ (001) и (010); L^3 лежащая въ октантѣ XYZ связываетъ ее съ (001) и $(0\bar{1}0)$ и т. д.

Если мы выдѣлимъ эти шесть плоскостей флюорита изъ сложнаго его многогранника, рис. 41, — то получимъ новый болѣе простой многогранникъ, уже намъ ранѣе извѣстный (рис. 1)—*кубъ*.

Обратимся теперь къ маленькимъ треугольнымъ площадкамъ (рис. 41), лежащимъ по одной въ каждомъ октантѣ (индексъ ихъ (111), $(1\bar{1}1)$ и т. д.). Мы видимъ, что тѣ же элементы симметріи связываютъ ихъ другъ съ другомъ и совершенно отдѣляютъ ихъ отъ ранѣе разсмотрѣнныхъ пинакоидальныхъ площадокъ: такъ для (111)—ось Z, какъ λ^4—связываетъ ее съ $(1\bar{1}1)$, $(\bar{1}\bar{1}1)$ и $(\bar{1}11)$; въ то же время центръ симметріи вызываетъ для всѣхъ нихъ появленіе параллельныхъ плоскостей — $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}11)$, $(11\bar{1})$ и $(1\bar{1}\bar{1})$. Всѣ эти 8 плоскостей тѣсно связаны между собою въ пространствѣ и выдѣленныя отдѣльно образуютъ другой многогранникъ, намъ также извѣстный—*октаэдръ* (рис. 6). Легко сообразить, что всѣ другіе элементы симметріи этого строенія связываютъ эти 8 плоскостей другъ съ дру-

гомъ, но не вызываютъ къ нимъ никакихъ новыхъ плоскостей. Такимъ образомъ, анализъ даннаго многогранника съ точки зрѣнія симметріи строенія, приводитъ къ раздѣленію его на два болѣе простыхъ тѣла. Въ этихъ болѣе простыхъ многогранникахъ, ни одна площадка не можетъ быть удалена безъ того, чтобы не нарушилась симметрія строенія; слѣдовательно, форма этихъ болѣе простыхъ многогранниковъ является выраженіемъ симметріи строенія. Такіе многогранники, которые состоятъ только изъ плоскостей, неизбѣжно существующихъ вмѣстѣ въ зависимости отъ всѣхъ элементовъ симметріи кристаллическаго строенія, называются *простыми формами.* Они не могутъ быть разложены на независимыя части. Такими простыми формами являются въ данномъ примѣрѣ октаэдръ и кубъ.

Многогранники въ составъ которыхъ входятъ плоскости различныхъ простыхъ формъ называются *комбинаціями.* Мы опредѣляемъ комбинацію, когда опредѣляемъ тѣ простыя формы, которыя входятъ въ ея составъ, такъ, напр., данный поліэдръ флюорита (рис. 41) представляетъ комбинацію куба и октаэдра.

179. *Простая форма* имѣетъ огромное значеніе для выясненія симметріи многогранника, ибо она даетъ представленіе о комплексѣ всѣхъ плоскостей, которыя во всѣхъ комбинаціяхъ даннаго тѣла неизбѣжно, вслѣдствіе симметріи строенія, появляются и исчезаютъ совмѣстно съ данной плоскостью. Изучая эти комплексы отдѣльно для пирамидальныхъ, пинакоидальныхъ, призматическихъ и доматическихъ плоскостей (§ 157), можно получить для каждаго кристаллическаго строенія ясное представленіе о всѣхъ различныхъ возможныхъ для него простыхъ многогранникахъ и этимъ путемъ отличить всѣ 32 кристаллическихъ строенія другъ отъ друга. Такой пріемъ изслѣдованія наиболѣе удобенъ для элементарнаго изученія геометрическихъ свойствъ каждаго строенія и мы будемъ имъ пользоваться въ своемъ мѣстѣ (см. главу пятую).

Каждую *простую форму* можно выразить индексомъ, точно такъ же какъ мы это сдѣлали для ея плоскостей. Для этого надо только взять индексъ какой нибудь изъ ея плоскостей и придать ему видъ, отличный отъ индекса плоскости. Какъ мы видѣли (§ 178) зная индексъ одной плоскости простой формы, легко можно съ помощью симметріи, найти индексы всѣхъ ея плоскостей. Для индекса формы употребляются фигурныя скобки { }, въ которыя заключаются характеристики

индекса плоскости. Такъ, напр., кубъ (§ 178) обозначаютъ $\{100\}$, октаэдръ $\{111\}$. Безразлично какой изъ индексовъ плоскостей взять за *индексъ простой формы*, ибо исходя изъ каждаго изъ нихъ легко можно прійти къ выводу всѣхъ плоскостей простой формы; такъ что напр. $\{100\} = \{010\} = \{0\bar{1}0\}$ и т. д. Всѣ эти индексы обозначаютъ одинъ и тотъ же кубъ.

Пользуясь индексами простыхъ формъ можно легко *опредѣлить комбинацію*, т. е. написать индексы тѣхъ простыхъ формъ, которыя ее составляютъ. Такъ, напр., комбинація флюорита (рис. 41) обозначается: $\{100\}.\{111\}$.

180. Индексъ простой формы получаетъ опредѣленное значеніе только тогда, когда извѣстно кристаллическое строеніе, къ которому принадлежитъ многогранникъ. Такъ, напр., для правильнаго обозначенія поліэдра рис. 41, намъ надо дать символъ его симметріи, т. е. полное его обозначеніе будетъ: $Ca\,F_2$, $3\lambda^4\ 4L^3\ 6L^2\ c\ 3\pi\ 6P$, $\{100\}.\{111\}$.[1]).

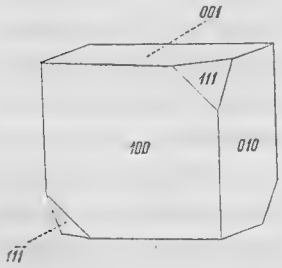


Рис. 42.

Безъ указанія симметріи нельзя изъ индекса точно знать форму многогранника. Такъ, напр., для веществъ строенія $3\lambda^2\ 4L^3\ 6P$, индексъ $\{111\}$ будетъ обозначать совершенно другую геометрическую фигуру; онъ не будетъ обозначать октаэдръ, хотя кубъ—$\{100\}$—останется неизмѣннымъ.

Въ самомъ дѣлѣ для этого строенія, напр., для борацита—$Mg_7\ B_{16}\ O_{30}\ Cl_2$—мы имѣемъ—для комбинаціи $\{100\}.\{111\}$, форму многогранника—рис. 42. Здѣсь октантъ XYZ не связанъ симметріей съ октантомъ XYZ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ послѣднемъ появится плоскость (111). Въ такомъ случаѣ съ ней связываетъ:

λ^2 (ось Z).....$(\bar{1}\bar{1}1)$
λ^2 (ось Y).....$(\bar{1}1\bar{1})$
λ^2 (ось X).....$(1\bar{1}\bar{1})$

---

[1]) Химическій составъ долженъ обозначаться потому, что для тѣлъ всѣхъ системъ, кромѣ правильной, въ связи съ нимъ мѣняется форма кристаллической ячейки (§ 126), т. е. форма многогранника. На данномъ примѣрѣ ячейка не зависитъ отъ состава (въ правильной системѣ).

Всѣ остальные элементы симметріи ($4L^3$ и $6P$) связываютъ тѣ же четыре плоскости между собою, но не вызываютъ никакихъ новыхъ плоскостей. Если бы многогранникъ {111}, строенія $3\lambda^2\ 4L^3\ 6P$, развился одинъ самостоятельно, получилась бы иная геометрическая фигура, чѣмъ для {111} строенія $3\lambda^4\ 4L^3\ 6L^2\ cgP$, получился бы *тетраэдръ* (рис. 24).

Легко убѣдиться, что для простой формы {100} симметрія $3\lambda^2\ 4L^3\ 6P$ вызываетъ связь между тѣми же 6-ю плоскостями, какія, развиваясь, даютъ кубъ (§ 178).

Разница между простыми формами одинаковаго индекса получилась бы еще рѣзче, если бы мы взяли для сравненія строенія, принадлежащія къ разнымъ кристаллическимъ системамъ (см. главу V-ю).

Такимъ образомъ, *индексъ простой формы имѣетъ опредѣленное значеніе только тогда, когда извѣстна симметрія того строенія, къ которому форма относится.*

181. Опредѣленіе простой формы, данное въ § 178 является неполнымъ. Очевидно могутъ быть случаи, когда плоскость кристалла не связана симметріей ни съ какой другой плоскостію многогранника. Таковы, напр., будутъ свойства многогранниковъ одного изъ строеній триклинической системы—геміэдріи триклинической системы, въ которой совсѣмъ нѣтъ элементовъ симметріи [1]). Очевидно здѣсь каждая плоскость будетъ совершенно независима отъ всѣхъ остальныхъ. *Такія свободныя плоскости, не связанныя симметріей съ другими плоскостями многогранника, мы будемъ также называть простыми формами.*

Такимъ образомъ въ геміэдріи триклинической системы {111} обозначаетъ одну плоскость въ октантѣ XYZ.

Подобныя простыя формы существуютъ и въ другихъ строеніяхъ, напр., плоскость перпендикулярная къ $\lambda^3 = Z$ въ строеніи $3P\ \lambda^3$— т. е. {0001}—гексагональной системы и т. д.

182. Въ этихъ случаяхъ простая форма не имѣетъ вида многогранника, а всегда составляетъ его часть. Такія простыя формы называются *открытыми простыми формами*; въ отличіе отъ нихъ простыя формы, образующія замкнутые многогранники, называются *закрытыми* простыми формами.

---

[1]) Это строеніе можно обозначить ∞L^1, т. ч. у него имѣется только эта симметрія, свойственная всякому тѣлу въ пространствѣ трехъ измѣреній.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда въ кристаллическихъ многогранникахъ встрѣчаются открытыя простыя формы, онѣ встрѣчаются всегда въ комбинаціяхъ. Отдѣльныя физическія явленія иногда могутъ выразиться открытыми простыми формами (напр., спайность въ слюдѣ, $\lambda^2\, c\, \pi$, параллельно $\{001\}$) (§ 55), но геометрическая кристаллографія (§ 150) можетъ имѣть съ ними дѣло только въ комбинаціяхъ.

Однако точно также только въ комбинаціяхъ могутъ встрѣчаться и нѣкоторыя закрытыя простыя формы. Многогранникъ, образованный закрытой простой формой, не можетъ быть всегда сравниваемъ съ тѣми поліэдрами, съ которыми имѣетъ дѣло геометрическая кристаллографія. Это идеальный многогранникъ, который выражаетъ лишь неизбѣжную, благодаря симметріи, зависимость между плоскостями, опредѣленнымъ образомъ расположенными въ пространствѣ; но эти плоскости въ дѣйствительности могутъ никогда отдѣльно не наблюдаться въ природѣ и не соотвѣтствовать никакимъ физическимъ явленіямъ. Между тѣмъ геометрическая кристаллографія имѣетъ дѣло только съ поліэдрами, отвѣчающими опредѣленнымъ физическимъ свойствамъ вещества (§ 146).

И въ самомъ дѣлѣ среди простыхъ формъ есть поліэдры, которые не соотвѣтствуютъ одному изъ характернѣйшихъ свойствъ кристаллическихъ многогранниковъ, именно расположенію всѣхъ плоскостей ихъ зонами. По своей формѣ онѣ даютъ совершенно иное распредѣленіе плоскостей. Таковы, напр., многогранники $\{h\, i\, \bar{k}\, l\}$ въ строеніи $\lambda^3\, 3L^2$, такъ наз. *тригональные трапецоэдры* (напр.

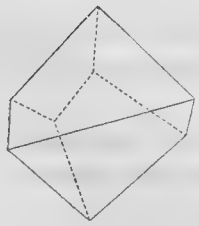


Рис. 43.

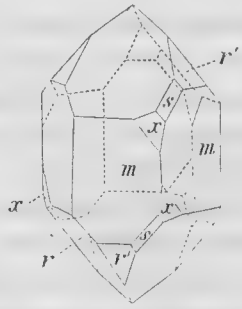


Рис. 44.

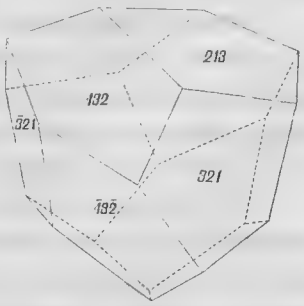


Рис. 45.

$\{12\bar{3}1\}$ (рис. 43). Такіе трапецоэдры извѣстны только въ комбинаціяхъ, напр. въ SiO_2, въ кварцѣ (рис. 44), т. к. иначе получается форма, про-

тиворѣчащая явленію зональнаго распредѣленія плоскостей [1]). Здѣсь тригональный трапецоэдръ x $\{\bar{5}161\}$ лежитъ въ зонахъ, напр. съ s, m, r'; между тѣмъ всѣ плоскости тригональнаго трапецоэдра отдѣльно взятаго (рис. 43) даютъ ребра, которыя не параллельны между собою. Поэтому тригональные трапецоэдры въ свободномъ видѣ не могутъ наблюдаться. То же самое замѣчено и для другихъ простыхъ формъ, которыя также никогда не наблюдались въ свободномъ видѣ (напр., тетартоэдръ — $\{123\}$ — $4L^3\,3L^2$—рис. 45), а встрѣчались только въ комбинаціяхъ, напр., $\{153\}$. $\{124\}$ для $Ba\,N_2\,O_6$ (рис. 46) (по наблюденію Льюиса) [2]).

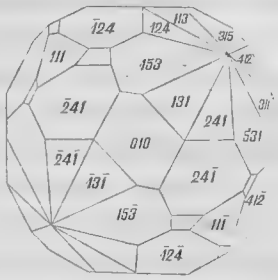


Рис. 46.

183. Идеальные же кристаллическіе многогранники (§ 150) всегда представляютъ модели дѣйствительно наблюдаемыхъ въ природѣ случаевъ. При этомъ въ нихъ всегда возстанавливается не только

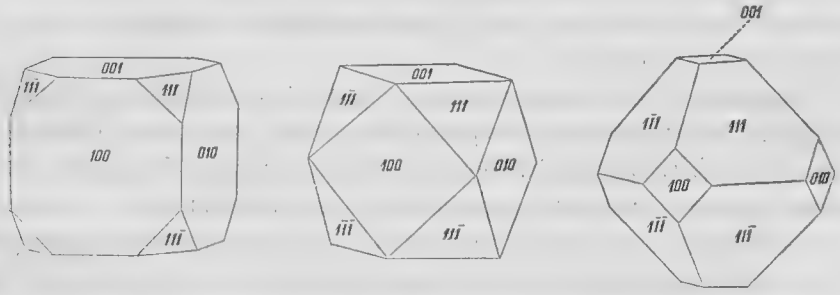


Рис. 47 a—c.

количество и форма измѣнчивыхъ элементовъ многогранника, но и ихъ относительные размѣры.

Если мы опредѣлимъ какой-нибудь многогранникъ, какъ $\{111\}$. $\{100\}$, $3\lambda^4\,4\lambda^3\,6L^2c\,3\pi.\,6P$—то мы не будемъ имѣть яснаго о немъ

---

[1]) Въ этомъ рисункѣ $x = \{5\bar{1}6\bar{1}\}$, $s = \{11\bar{2}1\}$, $r' = \{01\bar{1}1\}$ и $m = \{1\bar{0}10\}$.

[2]) Чисто абстрактное, схематическое значеніе закрытыхъ простыхъ формъ весьма часто забывается, и онѣ изучаются на ряду съ дѣйствительно наблюдавшимися въ природѣ комбинаціями. Это правильно только для простыхъ формъ, не противорѣчащихъ закону зонъ. Въ общемъ же случаѣ простая форма, возстановленная въ своей фигурѣ есть простая схема, указывающая на взаимную связь мысленно выдѣленныхъ плоскостей вслѣдствіе симметріи.

представленія, если не укажемъ, какія грани особенно развиты, господствуютъ. Такъ, напр., подъ это обозначеніе одинаково подойдутъ три слѣдующихъ на видъ различныхъ комбинаціи (рис. 47a — c); въ 47a — господствуетъ {100}, въ 47c — господствуетъ {111}, а въ 47b — обѣ формы развиты одинаково. Очевидно, каждая изъ этихъ комбинацій представляетъ съ геометрической точки зрѣнія различный многогранникъ.

Поэтому, принято различать *господствующія* простыя формы отъ подчиненныхъ и при обозначеніи комбинаціи на первомъ мѣстѣ пишется господствующая форма, а на второмъ—подчиненная (напр. 47a—{100}. {111}, а 47c—{111}. {100}).

Вполнѣ строго этого провести нельзя, какъ напр., въ рис. 47b (т. наз. *кубоктаэдръ*), но въ огромномъ большинствѣ случаевъ это возможно и при опредѣленіи комбинаціи нерѣдко удобно этого придерживаться [1]). Дѣло въ томъ, что при полученіи при опредѣленныхъ условіяхъ многогранниковъ какого-нибудь химическаго соединенія, порядокъ развитія граней простыхъ формъ никогда не мѣняется и обыкновенно господствующія простыя формы обладаютъ наиболѣе простыми индексами.

Причина этого явленія намъ не вполнѣ извѣстна; она связана, отчасти со свойствами поверхностнаго слоя кристалла, отчасти съ молекулярнымъ распредѣленіемъ его векторовъ. Но благодаря устойчивости этого признака, различеніе господствующихъ и подчиненныхъ формъ очень важно при изслѣдованіи явленій кристаллизаціи. Въ соотвѣтствующей главѣ я вернусь къ этому явленію, здѣсь же только отмѣчу основной выводъ, что господствующія формы отличаются наиболѣе простыми индексами.

184. **Законъ Гаюи и векторіальная гипотеза Грассманна.** Возвратимся теперь къ дальнѣйшему разсмотрѣнію закона Гаюи (§ 176). На основаніи этого закона характеристики индексовъ простыхъ формъ должны быть числами раціональными, простыми и небольшими. Для господствующихъ формъ онѣ рѣдко больше 2 (т. е. равны 0, 1, $\overline{1}$, 2, $\overline{2}$), для обычныхъ рѣдко больше 3 и въ исключительныхъ случаяхъ превышаютъ 10.

---

[1]) Если необходимо, можно и въ этихъ случаяхъ, конечно, отличать господствующія формы, подчеркивая ихъ или набирая инымъ шрифтомъ (въ данномъ случаѣ для кубоктаэдра надо такъ отмѣтить ихъ обѣ).

Однако такое выраженіе закона Гаюи слишкомъ абстрактно, ибо геометрическій поліэдръ, обладающій подобными индексами простыхъ формъ не можетъ дать яснаго представленія о геометрическомъ характерѣ того физическаго явленія, которое выражается кристаллическимъ многогранникомъ. Оно правильно для модели кристаллическаго тѣла, но не для самаго кристаллическаго поліэдра. Мы никогда не должны забывать, что кристаллическій многогранникъ не есть правильно обтесанное снаружи инертное тѣло, какими то причинами принявшее геометрическую форму, но что онъ служитъ проявленіемъ опредѣленнаго молекулярнаго строенія твердаго вещества, указываетъ на распредѣленіе въ немъ частичныхъ «силъ», вызывающихъ въ немъ извѣстныя движенія. Уже давно замѣчено, что существуютъ плоскости, которыя встрѣчаются въ кристаллическихъ многогранникахъ чаще, чѣмъ всѣ другія, напр. плоскости, лежащія одновременно въ двухъ обычныхъ зонахъ; есть простыя формы, которыя постоянно находятся вмѣстѣ даже въ веществахъ различнаго химическаго состава; есть немногія опредѣленныя зоны, въ которыхъ всегда появляются кристаллическія грани и другія, въ которыхъ онѣ не развиваются; есть простыя формы, которыя всегда встрѣчаются въ тѣлѣ одновременно съ другими и т. д. Съ разнообразными случаями подобнаго рода мы встрѣтимся при изученіи явленій кристаллизаціи. Здѣсь важно только отмѣтить, что наблюдается какъ бы извѣстная зависимость, опредѣленныя соотношенія между плоскостями, образующими кристаллическій многогранникъ. Эти соотношенія могутъ существовать въ немъ только потому, что кристаллическій многранникъ не есть идеальное тѣло геометріи (для котораго эти явленія немыслимы), а есть результатъ взаимодѣйствія различныхъ векторіальныхъ частичныхъ силъ, присущихъ твердому веществу; векторіальность этихъ силъ есть наиболѣе характерное свойство однороднаго твердаго тѣла (§ 44).

Наиболѣе рѣзкимъ, бросающимся въ глаза признакомъ простыхъ формъ съ этой точки зрѣнія, является то, что онѣ *не равнозначны*. Однѣ изъ нихъ наблюдаются во всѣхъ веществахъ, во всѣхъ кристаллахъ — другія появляются очень рѣдко; нѣкоторыя образуются при совершенно случайныхъ, исключительныхъ обстоятельствахъ. Изученіе того, какое значеніе имѣютъ въ тѣлѣ простыя формы различныхъ индексовъ, выясненіе ихъ болѣе частаго или рѣдкаго по-

явленія въ кристаллическихъ многогранникахъ даетъ намъ важныя указанія для болѣе точнаго пониманія закона Гаюи и для отличія кристаллическихъ поліэдровъ отъ соотвѣтствующихъ тѣлъ геометріи.

185. Прежде всего ясно, что изъ числа возможныхъ простыхъ формъ по закону Гаюи наблюдаются не всѣ, при чемъ по мѣрѣ возрастанія величины характеристикъ ихъ индекса, количество наблюдаемыхъ формъ быстро убываетъ. Такъ, напр. допуская характеристики въ индексахъ не выше 10, количество всѣхъ плоскостей возможныхъ для какого нибудь вещества по закону Гаюи (т. е. обладающихъ характеристиками раціональными и не выше 10) достигаетъ огромной цифры 7490 [1]). Въ дѣйствительности, къ этому числу даже не приблизилось ни одно изъ изученныхъ веществъ. Въ теченіе столѣтней упорной работы давно накопился огромный матеріалъ и нѣкоторыя тѣла въ этомъ отношеніи изучены исчерпывающимъ образомъ, а между тѣмъ самыя богатыя многогранниками вещества даютъ maximum 1520 граней (кальцитъ—$Ca\ CO_3$, $\lambda^3\ 3L^2\ c\ 3P$ по Федорову (1901)). Въ это число, однако, включены плоскости, характеристики индексовъ которыхъ выше 10, плоскости сомнительныя и смѣщенныя со своего положенія позднѣйшими воздѣйствіями. Если мы вычтемъ всѣ эти плоскости, разница будетъ еще болѣе значительная. Въ послѣднее время монографія Самойлова (1901) для барита ($Ba\ SO_4$, $3\lambda^2\ c\ 3\pi$) позволяетъ сдѣлать этотъ подсчетъ болѣе правильно. Баритъ также принадлежитъ къ числу веществъ, исключительно богатыхъ простыми формами. Для него извѣстно 1098 плоскостей, собирающихся въ 181 простую форму; если исключить простыя формы съ сомнительными индексами и съ характеристиками выше 10—мы получимъ для барита—798 плоскостей, сосредоточенныхъ въ 130 простыхъ формъ—т. е. всего 10.8% теоретически возможныхъ граней [2]). Это

[1]) Это число получено мною благодаря любезной помощи проф. Б. К. Млодзіевскаго, за что приношу ему глубокую благодарность. Изъ общаго числа варіацій 21 элемента *(n)* (отрицательныя и положительныя характеристики и *O*) по 3 элемента *(k)* въ рядѣ—т. е. изъ 21^3 надо было вычесть невозможный индексъ (000) и тѣ индексы, которые имѣли общаго дѣлителя, такъ какъ такіе индексы кристаллографически идентичны (напр., (111), (222), (333) и т. д. или (011), (044) и т. д.) (ср. § 151).

[2]) Разница будетъ еще рѣзче, если принять формы съ болѣе сложными индексами. Для барита, по Самойлову, наиболѣе сложной будетъ {2.2.63}. Количество возможныхъ плоскостей съ характеристиками ± 63 достигаетъ огромной

количество быстро возрастаетъ, если характеристика индекса уменьшается, такъ, напр., для того же барита, для плоскостей съ характеристикой ± 3 изъ числа возможныхъ 290 плоскостей наблюдалось 226 плоскостей, т. е. уже около 77.9% [1]). Уже изъ этого примѣра ясно, что плоскости (resp. простыя формы) съ различными индексами не равнозначны и что для плоскостей съ простыми характеристиками индексовъ существуютъ въ природѣ условія, благопріятствующія ихъ образованію въ многогранникѣ.

Въ общемъ этотъ выводъ безусловно правиленъ для всѣхъ веществъ. Мы вездѣ видимъ чрезвычайно быстрое повышеніе частоты плоскостей въ зависимости отъ простоты ихъ характеристикъ. Для характеристикъ ± 1 число это почти приближается къ идеальному т. е. къ 100%, для ± 2 (разъ онѣ появляются) оно еще очень значительно (40—100%) и затѣмъ быстро падаетъ.

186. Въ настоящее время мы имѣемъ довольно хорошую провѣрку этого явленія на матеріалѣ, накопленномъ въ минералогіи. Какъ мы увидимъ (см. главу о кристаллизаціи), появленіе той или иной простой формы въ кристаллическомъ поліэдрѣ зависитъ отъ внѣшнихъ условій (температуры, давленія, массы кристаллизующагося вещества, примѣсей въ растворѣ и т. п.), при которыхъ онъ выдѣляется. Кристаллическіе поліэдры, образовавшіеся въ природѣ,— такъ называемые минералы — выдѣлились при такомъ разнообразіи внѣшнихъ условій, которое совершенно не достижимо средствами нашихъ лабораторій. И этотъ многотысячелѣтній опытъ въ лабораторіи природы происходилъ съ 1000 — 1500 веществами. Поэтому, поліэдры минераловъ значительно болѣе разнообразны по своимъ плоскостямъ, чѣмъ продукты нашихъ лабораторій и вслѣдствіе этого являются особо удобнымъ объектомъ для рѣшенія даннаго вопроса. Здѣсь и характеристики плоскостей выше и комбинаціи ихъ много сложнѣе.

Благодаря трудамъ Д. и Э. Дана (1868 — 1899) и Гольдшмидта

цифры 1620444 плоскостей. Наблюдалось же 1098 т. е. 0.067% теоретически возможныхъ.

[1]) Для характеристикъ ± 1 наблюдались всѣ 26 плоскостей — т. е. 100%. Но надо имѣть въ виду, что основная форма выбирается въ ромбической системѣ изъ числа пирамидальныхъ вполнѣ произвольно (8 плоск.) т. е. она всегда существуетъ въ тѣлѣ, если появилась хотя бы одна пирамидальная форма.

(и его сотрудника Кеттнера, 1886—1898) наблюденія надъ природными кристаллическими поліэдрами приведены въ настоящее время въ форму, позволяющую сдѣлать имъ довольно точный подсчетъ. Какъ показалъ Гольдшмидтъ (1898) этотъ подсчетъ приводитъ къ тому же самому выводу: плоскости съ характеристиками ± 1 и ± 2 встрѣчаются во всѣхъ веществахъ и почти въ полномъ комплектѣ, плоскости съ ± 3 также чрезвычайно развиты, тогда какъ плоскости съ болѣе высокими индексами наблюдаются рѣже, а грани съ характеристиками выше 5 попадаются только въ видѣ отдѣльныхъ, исключительныхъ случаевъ.

Въ общемъ изученіе кристаллическихъ поліэдровъ, получаемыхъ въ нашихъ лабораторіяхъ только подтверждаетъ это наблюденіе; въ огромномъ большинствѣ случаевъ ихъ индексы не превышаютъ ± 2, т. е. могутъ состоять maximum изъ 98 плоскостей; въ хорошо изученныхъ веществахъ для плоскостей съ характеристиками ± 1 наблюдались всѣ 100% или около того, а для плоскостей съ характеристиками ± 2 значительно меньше; напр., для хорошо изученнаго нѣсколькими изслѣдователями муравьинокислаго стронція ($Sr\,(COOH)_2\,2H_2O$, $3\lambda^2$) наблюдались 36 плоскостей, т. е. 36.7% (Алексатъ 1898).

Всѣ эти наблюденія во всякомъ случаѣ приводятъ къ тому заключенію, что 1) *плоскости (resp. простыя формы) съ различными индексами не равнозначны и что* 2) *формы съ болѣе простыми характеристиками имѣютъ въ строеніи вещества условія особенно благопріятствующія ихъ появленію.*

187. Отсюда слѣдуетъ, что законъ Гаюи, формулированный въ той абстрактной формѣ, какая придана ему въ §§ 171 сл., не отвѣчаетъ характеру дѣйствительно наблюдаемыхъ правильностей и требуетъ дальнѣйшаго болѣе тщательнаго анализа.

Появленіе той или иной плоскости (resp. простой формы) въ виду зональнаго строенія кристаллическихъ поліэдровъ (§ 163 сл.) можетъ находиться въ связи съ слѣдующими двумя условіями: 1) появляется или не появляется та зона, къ которой принадлежитъ данная плоскость и 2) развивается или не развивается въ предѣлахъ данной зоны соотвѣтствующая плоскость. Первое явленіе наблюдается довольно часто и мы встрѣтимся съ нимъ при изученіи явленій кристаллизаціи; оно заключается въ томъ, что въ многогранникахъ отсутствуютъ нѣкоторыя оси зонъ (§ 163), а слѣдовательно и всѣ

принадлежащія къ нимъ плоскости или въ томъ, что нѣкоторыя зоны чрезвычайно бѣдны плоскостями; такъ, напр., въ кристаллахъ сѣры (§ 171) зона съ доматическими плоскостями ($h0t$) очень бѣдна плоскостями т. е. слабо выражена [010] и т. д. Второе явленіе понятно само собою и не требуетъ особаго поясненія.

При анализѣ закона Гаюи съ точки зрѣнія появленія въ многогранникѣ тѣхъ или иныхъ плоскостей (resp. простыхъ формъ) необходимо принимать во вниманіе оба условія. Раньше всего необходимо выяснить: 1) какія плоскости въ предѣлахъ данной зоны или 2) какія зоны въ данномъ многогранникѣ находятся въ особенно благопріятныхъ условіяхъ для своего появленія, внѣ зависимости отъ химическаго состава или случайныхъ условій кристаллизаціи.

188. Для этого остановимся на характерѣ отрѣзковъ плоскостей, принадлежащихъ къ одной и той же зонѣ, согласно закону Гаюи. Для простоты возьмемъ зону [001], т. е. рядъ плоскостей, параллельныхъ оси Z. Проведя черезъ пучекъ такихъ плоскостей, пересѣкающихся въ одной линіи (оси зонъ), плоскость (001),—мы получимъ въ этой плоскости на осяхъ X и Y параметры этихъ плоскостей. Для простоты представимъ себѣ, что всѣ эти плоскости по

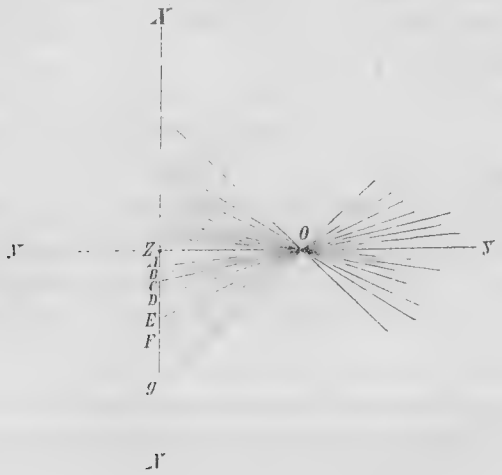


Рис. 48.

оси Y пересѣкаются въ одной точкѣ (т. е. передвинемъ туда ось зоны O; это вполнѣ законно, въ виду подвижности плоскостей кристаллическаго многогранника—§ 151). (рис. 48). Въ такомъ случаѣ

на оси X онѣ дадутъ всѣ тѣ параметры (ZA ($\frac{1}{3}$), ZB ($\frac{1}{2}$) и т. д.), которые возможны по закону Гаюи. Согласно же этому закону, всѣ эти прямыя должны относиться между собою какъ числа раціональныя и небольшія, какъ отрѣзки равные 1, 2, 3, 4.... Остановимся на плоскостяхъ съ характеристиками ± 3. Въ такомъ случаѣ въ этой зонѣ возможны только слѣдующіе параметры, которые я расположу въ порядкѣ ихъ нахожденія отъ начала координатъ Z (параметръ для этой точки, очевидно, равенъ 0):

$$\infty : -3 : -2 : -\tfrac{3}{2} : -1 : -\tfrac{2}{3} : -\tfrac{1}{2} : -\tfrac{1}{3} : 0 : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{2} : \tfrac{2}{3} : 1 : \tfrac{3}{2} : 2 : 3 : \infty$$

Ясно, слѣдовательно, что изъ закона Гаюи, легко можно опредѣлить *количество плоскостей*, которое можетъ находиться въ одной и той же зонѣ. Въ данномъ случаѣ (для ± 3) ихъ можетъ быть всего 32 [1]), для ± 2 ихъ всего 20, для ± 4—52 и т. д.

Въ каждой зонѣ, какую бы мы ни выбрали, могутъ находиться только такія плоскости, отрѣзки которыхъ *на осяхъ координатъ* даютъ указанныя въ этомъ рядѣ чиселъ взаимныя отношенія. Въ каждой изъ точекъ A, B и т. д. (рис. 48) осей координатъ (и только въ нихъ), пересѣкаются всѣ плоскости, существующія въ данномъ кристаллическомъ многогранникѣ, въ какихъ бы зонахъ онѣ не лежали, если только характеристика ихъ не превышаетъ ± 3. Это логическій выводъ изъ закона Гаюи.

189. Можно выразить это явленіе иначе. До сихъ поръ мы изучали параметры кристаллическихъ плоскостей на опредѣленнымъ образомъ выбранныхъ координатныхъ осяхъ поліэдра. Но для плоскостей одной и той же зоны эти параметры могутъ быть замѣнены любыми отрѣзками, однообразно оріентированными въ зонѣ. Теоретически наиболѣе любопытенъ случай такихъ отрѣзковъ, изученный Грассманномъ (1829). Возьмемъ какую нибудь зону и разсмотримъ

---

[1]) Нахожденіе въ зонѣ двухъ параллельныхъ плоскостей съ параметрами равными O и двухъ параллельныхъ съ параметрами ∞ (въ данномъ примѣрѣ (100), ($\bar{1}$00), (0$\bar{1}$0) и (010)) требуетъ нѣкотораго поясненія. Когда мы переносимъ ось зоны въ точку O, то слѣдъ плоскостей ($\bar{1}$00) = (100) совпадетъ съ осью Y—т. е. ихъ параметръ на X при такой установкѣ равенъ нулю. Въ то же время (010) и (0$\bar{1}$0)—какъ ясно изъ индекса, всегда параллельны X, т. е. ихъ параметръ равенъ ∞. Принадлежность ихъ къ зонѣ [001] можетъ быть провѣрена изъ уравненія § 164.

взаимныя расположенія ея плоскостей по отношенію къ оси зонъ. Для этого замѣнимъ плоскости пучкомъ перпендикулярныхъ къ нимъ векторовъ (§ 149). Въ этомъ пучкѣ возьмемъ ось зоны за координатную ось Z, а за двѣ другія оси X и Y — два изъ векторовъ пучка (они очевидно—§ 163— перпендикулярны къ $[u\,v\,w]=Z$, но между собою дѣлаютъ любой уголъ). Въ такомъ случаѣ пользуясь построеніемъ, аналогичнымъ рис. 48, мы легко убѣдимся, что векторы такого пучка дѣлаютъ на этихъ координатныхъ осяхъ X или Y (рис. 49) отрѣзки, которые относятся между собою, какъ числа того же ряда, какой получился для параметровъ согласно закону Гаюи, т. е. $OA=\frac{1}{3}$, $OB=\frac{1}{2}$, $0g=3$ и т. д. Опять таки ограничимся только характеристиками ± 3. Нѣтъ надобности вдаваться въ подробныя доказательства; неизбѣжность такихъ отношеній для отрѣзковъ векторовъ понятна изъ слѣдующихъ соображеній. Въ зонѣ мы имѣемъ пучекъ плоскостей (пересѣкающихся въ одной линіи— въ оси зонъ), которыя на одной и той же координатной оси дѣлаютъ параметры, относящіеся между собою, какъ рядъ чиселъ $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:1:\frac{3}{2}:2$ и т. д. Мы знаемъ что эти числа (параметры) для данныхъ плоскостей находятся въ опредѣленномъ отношеніи съ синусами ихъ гранныхъ угловъ, съ которыми онѣ связаны ангармоническимъ отношеніемъ (§ 168). Но беря пучекъ векторовъ, перпендикулярныхъ къ даннымъ плоскостямъ, мы въ плоскости, въ которой лежатъ эти векторы, имѣемъ между ними углы, которые равны дополненію до 180° гранныхъ угловъ. Слѣдовательно синусы этихъ угловъ будутъ равны синусамъ гранныхъ угловъ и ангармоническое отношеніе этихъ векторовъ въ данной плоскости равно такому же отношенію изъ синусовъ гранныхъ угловъ. Конечно, при этомъ и отрѣзки, которые получаются въ данной плоскости, отъ пересѣченія этого пучка линіей, принадлежащей къ самому пучку, дадутъ намъ такія же простыя

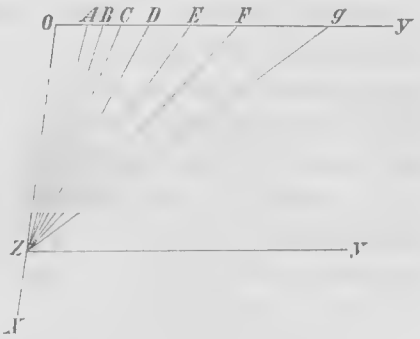


Рис. 49.

отношенія, какія получаются для параметровъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ этимъ векторамъ.

190. Всмотримся въ этотъ рядъ чиселъ:

$$-3:-2:-\tfrac{3}{2}:-1:-\tfrac{2}{3}:-\tfrac{1}{2}:-\tfrac{1}{3}:0:\tfrac{1}{3}:\tfrac{1}{2}:\tfrac{2}{3}:1:\tfrac{3}{2}:2:3\ldots$$

Этотъ рядъ давно уже обратилъ на себя вниманіе кристаллографовъ.

Впервые Малюсъ (1809), изучая наиболѣе распространенные ромбоэдры (§ 54) кальцита ($Ca\,CO_3$, $\lambda^3\ 3L^2c\ 3P$) замѣтилъ, что ихъ отрѣзки по осямъ X, Y и U относятся между собою, какъ числа, принадлежащія къ одной и той же геометрической прогрессіи. Позже эти идеи, независимо отъ Малюса были развиты Мосомъ (1823—1839) и сыграли крупную роль въ исторіи кристаллографіи. Мосъ думалъ видѣть въ отрѣзкахъ, дѣлаемыхъ кристаллическими гранями члены геометрическихъ прогрессій 2^n и $(\sqrt{2})^n$, напр. $2^{-4}:2^{-2}:2^{-3}:2^{-1}:2^0:2^1:2^2:2^3$ — т.-е. $\frac{1}{8}:\frac{1}{4}:\frac{1}{2}:1:2:4:8\ldots$ (для 2^n). Очевидно такой рядъ получится изъ ряда § 188, если не доразовьются плоскости съ параметрами $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 3 и т. д. Причину этого явленія Мосъ думалъ видѣть въ свойственномъ Природѣ стремленію къ простымъ числовымъ соотношеніямъ. Для доказательства своей теоріи Мосъ переработалъ весь кристаллографическій матеріалъ своего времени и подвергъ критикѣ наблюденія, не сходившіяся съ ея выводами. Эта критическая работа Моса, его учениковъ и его противниковъ, имѣла огромное значеніе для улучшенія методовъ изслѣдованія, вызвала болѣе тщательную критику набраннаго матеріала и очистила науку отъ ранѣе накопившагося, довольно схематичнаго матеріала. Гаюи, Вейссъ и ихъ непосредственные ученики въ началѣ не придавали особаго значенія точному измѣренію явленія, если только оно въ общихъ чертахъ не противорѣчило ихъ теоретическимъ посылкамъ. Имъ казалось, что теорія даетъ незыблемыя данныя и измѣреніе не можетъ доказать ея правильность или ошибочность. Но вскорѣ выяснилось, что правильность въ природныхъ явленіяхъ не можетъ быть выражена въ тѣхъ простыхъ прогрессіяхъ, которымъ думалъ ихъ подчинить Мосъ и уже въ 1830—1840 годахъ ряды Моса были оставлены даже ближайшими его послѣдователями, напр., Науманномъ.

191. Почти одновременно съ явленіями, выдвинутыми Мосомъ, получило начало другое теченіе, которое въ настоящее время привлекло къ себѣ значительное вниманіе, благодаря трудамъ Гольдшмидта и его послѣдователей. Уже въ 1818 году Вейссъ, изучая взаимныя отношенія отрѣзковъ поліэдровъ правильной системы, указалъ, что между ними наблюдаются простыя числовыя соотношенія, совершенно тождественныя съ отношеніями, наблюдаемыми между тонами нашей музыки. Вейссъ не разработывалъ далѣе этого вопроса, но въ 1829 году Ю. Грассманнъ, развивая идеи о векторіальныхъ силахъ кристалла, указалъ на многочисленныя аналогіи между отрѣзками, которыя дѣлаютъ плоскости одной и той же зоны или параметры одного и того же химическаго вещества и между соотношеніями музыкальныхъ тоновъ; — какъ образно выразился Грассманнъ кристаллическій поліэдръ представляетъ застывшій аккордъ—аккордъ гармоническихъ молекулярныхъ колебаній твердаго тѣла, тѣхъ движеній, которыя происходили по векторамъ, перпендикулярнымъ къ его плоскостямъ, во время его кристаллизаціи. Въ концѣ 1890 годовъ къ тѣмъ же идеямъ вернулся въ рядѣ работъ Гольдшмидтъ (1897 — 1901), повторившій въ значительной мѣрѣ неизвѣстныя ему соображенія Грассманна. Въ настоящее время можно считать несомнѣннымъ, что такія гармоническія отношенія характеризуютъ кристаллическій поліэдръ и отличаютъ его отъ большинства тѣлъ геометріи. Гольдшмидтъ пытался идти дальше въ анализѣ этихъ числовыхъ правильностей и думалъ видѣть здѣсь больше, чѣмъ простую формальную аналогію. Здѣсь мы видимъ какъ бы возрожденіе, въ частномъ случаѣ, пифагорейскихъ или древнекитайскихъ воззрѣній на тождество міровой и музыкальной гармоніи.

Но гармоничность отрѣзковъ является, какъ мы видѣли, простымъ слѣдствіемъ закона Гаюи—раціональности и небольшой величины параметровъ. Если взять для характеристикъ индексовъ небольшія числа—отрѣзки кристаллическихъ плоскостей всегда дадутъ между собою такія гармоническія соотношенія: это слѣдствіе свойствъ *чиселъ*, а не того *физическаго явленія*, которое выражается въ такихъ параметрахъ. Поэтому, едва ли правильно — съ физической точки зрѣнія — доискиваться связи между этими различными явленіями, выражаемыми сходными по формѣ законами. Ничего *новаго* по сравненію съ закономъ Гаюи гармоническіе ряды не дали, тѣмъ болѣе,

что по указаніямъ Гольдшмидта наблюдаемыя правильности вполнѣ соотвѣтствуютъ дѣйствительности только для характеристикъ ± 3: дальше же слѣдуютъ очень немногія плоскости изъ числа теоретическихъ возможныхъ, и аналогія съ музыкальными созвучіями исчезаетъ.

Аналогія между гармоническими отрѣзками кристаллическихъ плоскостей и между длинами волнъ, вызывающихъ музыкальные тоны нашей гармоніи чисто формальнаго свойства. Она зависитъ отъ того, что то и другое явленіе связано съ простыми соотношеніями немногихъ раціональныхъ чиселъ. Причина же—почему мы встрѣчаемся здѣсь съ немногими простыми числами—требуетъ для своего выясненія новыхъ гипотезъ и не видна въ томъ опредѣленіи закона Гаюи, которое дано нами раньше.

192. При разсмотрѣніи правильныхъ соотношеній между плоскостями одной и той же зоны я оставилъ въ сторонѣ вопросъ о томъ, какія вообще зоны возможны въ кристаллическомъ тѣлѣ. Если бы въ тѣлѣ развивались всѣ зоны, теоретически возможныя согласно закону Гаюи, то при существованіи плоскостей съ большими характеристиками получились бы многогранники, очень близкіе къ шару; но это, очевидно, было бы возможно только тогда, когда векторіальныя свойства кристалла были бы выражены слабо т. е. когда почти всѣ векторы были бы мало различны другъ отъ друга. Въ дѣйствительности этого нѣтъ и векторіальность кристалла выражена рѣзко.

На этомъ основана первая попытка для выясненія характера зонъ съ точки зрѣнія закона Гаюи, сдѣланная въ блестящей формѣ Ю. Грассманномъ (1829—1833). Эту работу Грассманна постигло полное забвеніе, несмотря на то, что отдѣльныя лица не разъ указывали на ея значеніе: такъ его сынъ — знаменитый математикъ І. Г. Грассманнъ въ рядѣ математическихъ работъ (1839—1878), тоже оцѣненныхъ только послѣ его смерти, обращалъ вниманіе на разработку вопросовъ кристаллографіи въ духѣ своего отца; другой сынъ Ю. Грассманна, философъ Р. Грассманнъ, далъ сжатый очеркъ кристаллографіи, исходя изъ идей своего отца, въ своей системѣ «Міровой жизни» (1867). Но всѣ эти работы оригинальныхъ Штеттинскихъ мыслителей, написанныя своеобразнымъ языкомъ, съ малообычными математическими пріемами, въ трудно доступныхъ изданіяхъ, въ которыхъ на ряду съ крупными и любопытными выводами,

многое оказывалось несогласнымъ съ научнымъ матеріаломъ ихъ времени, не могли обратить вниманія на идеи Ю. Грассманна. Нельзя сказать, чтобы труды Ю. Грассманна совсѣмъ остались безъ вниманія: на нихъ указывалъ Гессель (1830), Удэ (1833), Карстенъ (1861) — наконецъ Миллеръ (1868), Квенштедтъ (1873) и Льюисъ (1899) — но они брали изъ нихъ отдѣльныя части — а съ другой стороны и работы Гесселя (см. § 83), Удэ и мемуаръ Миллера, дважды напечатанный (1868—1880) въ рѣдкомъ журналѣ— постигла одна и та же судьба:—они были забыты.

Лишь въ самое послѣднее время (1900—1902) Е. С. Федоровъ и, какъ мы видѣли Гольдшмидтъ (1897 — 1901), затронули тѣ же вопросы — независимо отъ Грассманна — и въ общемъ пришли къ тождественнымъ съ нимъ выводамъ. Они выдвинули къ началу XX столѣтія тѣ самыя идеи, которыя въ теченіе всего XIX вѣка Штеттинскіе мыслители пытались ввести въ кристаллографію.

193. Грассманнъ, при изученіи геометрической формы кристаллическаго поліэдра, замѣняетъ его плоскости перпендикулярными къ нимъ векторами (онъ ихъ называлъ лучами). Пріемъ этотъ, какъ мы видѣли, вполнѣ законенъ, т. к. вытекаетъ изъ закона Стенона (§ 148). Какого рода свойствами должны обладать эти векторы? Грассманнъ дѣлаетъ гипотезу, что эти *векторы не являются безразличными направленіями внутри кристалла, а имѣютъ физическое значеніе и представляютъ направленія частичныхъ силъ, вызывающихъ появленіе тѣхъ или иныхъ плоскостей кристалла.* Эти силы имѣютъ характеръ пульсирующихъ силъ — при ростѣ кристаллъ то сжимается, то расширяется, т. е. по нимъ идетъ волна. Въ этомъ отношеніи онъ, не сознавая того, развивалъ неизвѣстныя ему идеи Вейсса (1804 — § 17), который также считалъ, что оси кристалла и вообще взятыя въ немъ направленія имѣютъ не только простое геометрическое значеніе, но суть линіи, обладающія извѣстными физическими свойствами.

Такимъ образомъ по идеѣ Грассманна кристаллъ какъ бы замѣняется пучкомъ векторовъ — линій силъ; это тѣ частичныя силы, которыя вызываютъ отграниченіе кристалла отъ окружающаго пространства въ формѣ плоскостей. Благодаря векторіальности строенія кристалла (§ 44, 49 сл.) частичныя силы неизбѣжно будутъ различны по разнымъ направленіямъ. Для данной плоскости, по скольку она за-

виситъ отъ внутренняго строенія кристалла, будутъ имѣть значеніе только силы (= векторы) къ ней перпендикулярныя, ибо по законамъ механики, силы направленныя къ данной плоскости подъ угломъ, разложатся на слагающія: перпендикулярныя и параллельныя данной плоскости. Только перпендикулярная слагающая сила имѣетъ значеніе при ростѣ кристалла, т. е. при передвиженіи плоскости параллельно самой себѣ (законъ Стенона—§ 151). Эти силы какъ бы толкаютъ плоскость кристалла подобно тому, какъ сила вѣтра толкаетъ парусъ. Согласно основнымъ принципамъ строенія твердаго вещества эти векторы по параллельнымъ направленіямъ идентичны, а по разнымъ могутъ быть различны. Идентичны по разнымъ направленіямъ только векторы, лежащіе въ опредѣленномъ положеніи къ элементамъ симметріи строенія; слѣдовательно, количество одновременно образующихся плоскостей зависитъ отъ симметріи.

Въ этой формѣ представленіе Грассманна не представляетъ гипотезы, такъ какъ мы безъ всякаго сомнѣнія должны разсматривать кристаллъ, какъ совокупность векторіальныхъ частичныхъ «силъ». Гипотезой является, однако, лишь представленіе о характерѣ силъ, какія дѣйствуютъ по этимъ векторамъ. Грассманнъ считаетъ неизбѣжнымъ предположеніе, что эти силы дѣйствуютъ съ перерывами, пульсируя, и проявленіе такого ихъ характера онъ видитъ въ формальномъ совпаденіи отрѣзковъ кристаллическихъ плоскостей и звуковыхъ волнъ, вызываемыхъ нашими музыкальными инструментами.

194. Однако, для приложенія этихъ представленій къ закону Гаюи возможно оставить въ сторонѣ всякія предположенія о характерѣ этихъ силъ; здѣсь необходима иная гипотеза и она можетъ быть сдѣлана въ общей и вполнѣ неоспоримой формѣ.

Изъ закона Гаюи необходимо слѣдуетъ (§ 186), что различные векторы не равнозначны, такъ какъ не равнозначны перпендикулярныя къ нимъ плоскости. Однѣ плоскости появляются во всѣхъ многогранникахъ даннаго кристаллическаго строенія, другія встрѣчаются рѣже, иныя совсѣмъ рѣдко. Однѣ являются господствующими, другія всегда подчиненными (§ 183). Наконецъ, наблюдаются главнымъ образомъ формы съ простыми характеристиками. Для выраженія этихъ явленій Грассманнъ высказалъ гипотезу, что *между силовыми векторами кристалла существуютъ извѣстныя взаимодѣйствія* и что въ результатѣ такихъ взаимодѣйствій получаются новыя напра-

вленія частичныхъ силъ, образующіяся аналогично тому, какъ получаются созвучія нашихъ музыкальныхъ тоновъ. Кристаллъ строится изъ трехъ по крайней мѣрѣ силовыхъ векторовъ, всѣ остальныя получаются отъ ихъ сложенія.

Для того чтобы яснѣе представить это явленіе, возьмемъ какой нибудь кристаллическій многогранникъ. Въ немъ появляются три какія нибудь плоскости, которыя мы выберемъ за координатныя (010), (100) и (001) [1]). Если это господствующія и наиболѣе частыя плоскости, то перпендикулярные къ нимъ векторы будутъ направленіями наибольшихъ силъ *(основные векторы)*. Между этими векторами существуютъ взаимныя вліянія, въ результатѣ которыхъ въ кристаллѣ получаются новые силовые векторы отъ сложенія взаимно вліяющихъ основныхъ векторовъ. Очевидно, направленія этихъ вторичныхъ силовыхъ векторовъ могутъ быть точно и строго опредѣлены обычными пріемами механики, т. е. съ помощью построенія на плоскости *параллелограмма силъ* или общѣе, съ помощью обычнаго геометрическаго сложенія векторовъ. Точно также въ *пространствѣ* получатся направленія этихъ вторичныхъ векторовъ, если построить трансверсали параллелепипедовъ. Всѣ эти параллелограммы и параллелепипеды, очевидно, образованы векторами, начиная съ трехъ основныхъ (перпендикуляровъ къ (001), (010) и (100)).

195. Разсмотримъ сперва явленія на плоскости (рис. 50). Возьмемъ два какихъ нибудь основныхъ вектора (т. е. перпендикуляра къ господствующимъ плоскостямъ) OA и OB.

Эти оба вектора могутъ быть по величинѣ равными или различными. Разсмотримъ первый случай, т. к. болѣе сложныя явленія втораго случая вполнѣ могутъ быть выведены по аналогіи съ этимъ болѣе простымъ. Помимо тѣхъ силъ, которыя направлены по векторамъ AO и OB—отъ ихъ взаимодѣйствія можетъ возникнуть сила, направленная въ данной плоскости по ихъ равнодѣйствующей. Очевидно, при этомъ предполагается, что не всѣ частичныя силы, направленныя по AO или OB идутъ на образованіе равнодѣйствующей, а только нѣкоторая ихъ часть, такъ какъ иначе не появилось бы

---

[1]) Въ такой общей формѣ это правильно только для триклинической системы. Въ другихъ эти координатныя плоскости находятся въ зависимости отъ симметріи. Но de facto онѣ всегда являются господствующими и наиболѣе частыми. См. главу V.

плоскостей, перпендикулярныхъ къ OA и OB. Принимая относительныя величины тѣхъ частичныхъ силъ, которыя вступаютъ въ данномъ веществѣ во взаимодѣйствіе по OA и OB [1]), равными (т. е.

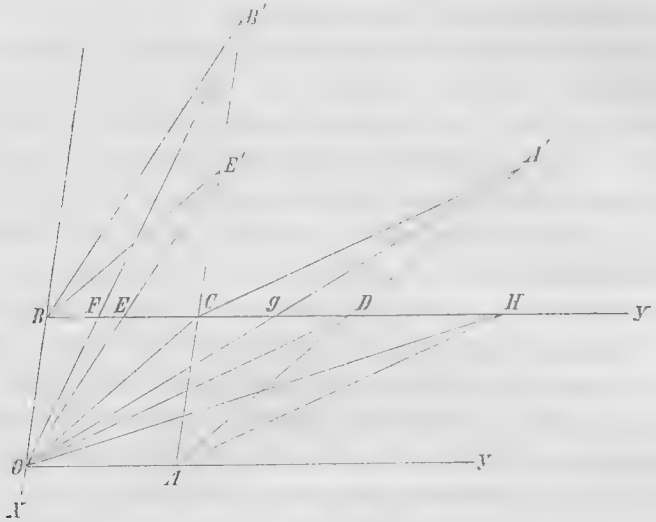


Рис. 50.

$AO=OB$)—получимъ направленіе новаго вторичнаго силоваго вектора OC. Перпендикулярно къ этому вектору OC можетъ появиться кристаллическая плоскость, но силы, ее вызывающія, вообще говоря, менѣе значительны, чѣмъ тѣ, направленія коихъ совпадаютъ съ OA и OB.

Обратимъ вниманіе на отрѣзки этихъ векторовъ по какой нибудь линіи, подобно тому какъ мы это дѣлали въ § 189. Примемъ OA за ось Y, а OB за ось X и будемъ изучать отрѣзки, которые дѣлаютъ такіе векторы на оси Y, если они всѣ сходятся въ одной точкѣ на оси X. Отрѣзокъ отъ точки B до проекціи на ось Y вектора OC (т. е. BC) мы можемъ принять равнымъ 1. (Онъ равенъ $OA=$ $=OB$). Въ такомъ случаѣ проекціи всѣхъ остальныхъ векторовъ,

---

[1]) Конечно остатки силъ, дѣйствующіе по OA и OB должны въ графическомъ изображеніи быть значительно больше линій OA и OB, такъ какъ эти силовые векторы больше, чѣмъ векторъ OC, ибо перпендикулярныя къ нимъ плоскости чаще встрѣчаются и раньше образуются. Здѣсь приняты во вниманіе только ихъ *направленія*.

полученныхъ путемъ сложенія съ помощью параллелограмма силъ изъ двухъ исходныхъ, дадутъ намъ тѣ же отношенія, какія получаются по закону Гаюи для параметровъ или векторовъ (§ 188).

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи исходной гипотезы силовые векторы дѣйствуютъ другъ на друга. Слѣдовательно и по OC пойдутъ не всѣ вторичныя силы, а часть ихъ вновь потратится на взаимодѣйствіе съ тѣми же исходными векторами OA и OB. При чемъ съ OA они образуютъ новый векторъ, проекція котораго на оси Y дастъ отъ B отрѣзокъ равный $2—BD$,—а съ OB они дадутъ векторъ — OE' — проекція котораго на оси Y отъ B дастъ отрѣзокъ равный $\frac{1}{2}$ и т. д.

Точно также надо допустить, что и всѣ вновь образованные векторы оказываютъ извѣстное вліяніе другъ на друга — вліяніе, которое выразится въ появленіи въ тѣлѣ новыхъ векторовъ, направленія которыхъ совпадутъ съ діагоналями построенныхъ на нихъ параллелограмовъ, такъ, напр., векторъ OF (проекція его $BF=\frac{1}{3}$) отъ взаимодѣйствія между OB и OE' (параллелограммъ $OE'\ BB'$) или векторъ OD (проекція $BD=2$) отъ взаимодѣйствія между OA и OC (параллелограммъ $OCDA$) или векторъ OA' (проекція $Bg=\frac{3}{2}$) отъ взаимодѣйствія между OC и OD (параллелограммъ $ODCA'$) и т. д.

Разсуждая такимъ образомъ, мы легко получимъ всѣ возможные въ тѣлѣ силовые векторы, проекціи пучка которыхъ на одномъ изъ нихъ выразятся въ рядѣ, вполнѣ соотвѣтствующемъ ряду закона Гаюи (напр., для характеристикъ ∓ 3)

$$0,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ 1,\ \tfrac{3}{2},\ 2,\ 3\ldots\ ^{1})$$

Во всѣхъ этихъ разсужденіяхъ мы строили параллелограммы векторовъ, 1) исходя изъ равенства основныхъ векторовъ OA и OB и 2) принимая во вниманіе при построеніи лишь направленіе всѣхъ остальныхъ векторовъ. Между тѣмъ, очевидно, что только *часть* силъ, направленныхъ по вектору, можетъ, слагаясь съ другимъ векторомъ, идти на построеніе новаго вектора, ибо одновременно видно и самостоятельное проявленіе слагающаго

---

[1]) Очевидно беря слагающія по лѣвую сторону отъ OB мы получимъ отрицательные вторичные векторы.

вектора—дѣйствіе которого сказывается въ появленіи перпендикулярной къ нему плоскости.

Это противорѣчіе можетъ быть устранено двумя гипотезами: или 1) предполагая, что части силъ, идущія на взаимодѣйствіе между векторами, строго пропорціональны ихъ *величинѣ* и въ такомъ случаѣ построеніе *ихъ направленій* (рис. 50) останется неизмѣннымъ или 2) предполагая, что части силъ, идущія на взаимодѣйствіе между векторами соотвѣтствуютъ закону Гаюи и относятся между собою, какъ раціональныя и небольшія числа. Послѣднее предположеніе сдѣлано было Грассманномъ и Гольдшмидтомъ. Въ обоихъ случаяхъ мы приходимъ къ тѣмъ же отношеніямъ отрѣзковъ.

196. Мы все время изучали явленіе на плоскости. Но очевидно совершенно также оно будетъ проявляться и въ пространствѣ. Только здѣсь роль діагонали параллелограма — будутъ играть трансверсали параллелепипеда, построеннаго на векторахъ, перпендикулярныхъ къ исходнымъ плоскостямъ (001), (010), (100). Очевидно при этомъ, явленіе будетъ правильно повторяться въ каждомъ октантѣ и первой плоскостью, перпендикулярной къ первой производной трансверсали, будетъ являться (111) или соотвѣтствующая ей плоскость другихъ октантовъ. Очевидно, идя тѣмъ же путемъ строя все новые и новые векторіальные параллелепипеды и проводя ихъ трансверсали, соотвѣтствующія равнодѣйствующимъ векторамъ, можно получить въ извѣстномъ опредѣленномъ порядкѣ всѣ возможныя въ кристаллическомъ многогранникѣ плоскости, а слѣдовательно и всѣ возможныя зоны. Эти вопросы особенно легко могутъ быть разсматриваемы съ помощью проекцій, какъ то и было сдѣлано Грассманномъ и позже Квенштедтомъ и Федоровымъ. Къ нѣкоторымъ, относящимся сюда выводамъ, я вернусь въ главѣ о кристаллизаціи.

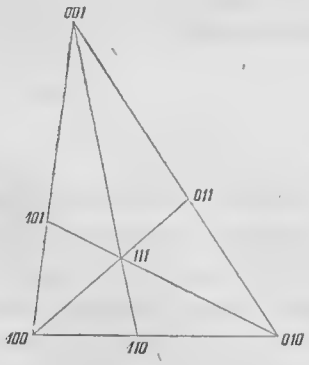


Рис. 51.

Съ помощью подобныхъ векторіальныхъ параллелепипедовъ вполнѣ возможно опредѣлить всѣ существующія въ кристаллѣ плоскости. При этомъ выяснилось, что плоскости съ наиболѣе простыми индексами будутъ получаться въ октантѣ (рис. 51) отъ взаимодѣйствія всѣхъ

трехъ векторовъ, перпендикулярныхъ къ (001), (100), (010)—т. е. (111), двухъ изъ этихъ векторовъ слѣд. въ каждой изъ зонъ [100.001], [100.010], [001.010]), (т. е. (101), (011) и (110). Эти плоскости, повторенныя со всѣми знаками ± во всѣхъ октантахъ—дадутъ всѣ плоскости съ характеристиками ± 1. Новыя плоскости съ болѣе сложными индексами будутъ получаться отъ взаимодѣйствія въ октантѣ этихъ 4-хъ вторичныхъ векторовъ другъ съ другомъ и съ 3-мя первоначальными и т. д. Наблюденіе показываетъ, что проявленіе этихъ производныхъ векторовъ очень быстро прекращается, и векторы съ характеристиками выше 3-хъ получаются довольно рѣдко. Происходитъ или погашеніе веществомъ, какъ бы интерференція, получаемыхъ векторіальныхъ силъ или величина болѣе сложныхъ векторовъ очень незначительна по сравненію съ первичными векторами и ихъ ближайшими производными.

197. Итакъ резюмируемъ теперь все сказанное.

Грассманнъ исходитъ изъ несомнѣннаго факта, что въ твердомъ кристаллическомъ веществѣ частичныя силы обладаютъ векторіальностію, и векторы, соотвѣтствующіе имъ, имѣютъ опредѣленную раціональную величину. Онъ допускаетъ, далѣе, что кристаллическія грани появляются въ строгой зависимости отъ величины векторіальныхъ силъ, при чемъ наиболѣе обычными, наблюдаемыми въ многогранникахъ даннаго вещества являются всегда три вектора—три измѣренія; иначе не получилось бы тѣла въ нашемъ пространствѣ. Перпендикулярно къ нимъ получаются три основныя плоскости, а всѣ остальныя находятся въ опредѣленномъ отношеніи къ основнымъ и всегда лежатъ перпендикулярно къ векторамъ, полученнымъ отъ сложенія трехъ основныхъ силъ. Другими словами Грассманнъ допускаетъ взаимное вліяніе векторовъ и тѣхъ силъ, которымъ они соотвѣтствуютъ; въ результатѣ такого вліянія получаются новыя плоскости. Вновь полученныя силы, однако, не мѣшаютъ одновременной передачѣ въ томъ же тѣлѣ различныхъ колебаній, какъ не мѣшаютъ другъ другу одновременно распространяющіяся въ одной и той же массѣ воздуха различныя колебанія, соотвѣтствующія разнымъ тонамъ. *Этимъ путемъ простота характеристикъ* (т. е. вторая часть закона Гаюи) *получаетъ новую форму выраженія и связывается съ частичными силами вещества*, такъ какъ простыя характеристики соотвѣтствуютъ тѣмъ векторамъ, которые получи-

лись отъ сложенія первичныхъ векторовъ и ближайшихъ къ нимъ, т. е. векторовъ отвѣчающихъ максимальнымъ частичнымъ силамъ.

Такое представленіе закона Гаюи чрезвычайно важно, т. к. благодаря ему явленіе переходитъ изъ области абстрактныхъ свойствъ многогранника въ реальную область частичныхъ силъ, результатомъ которыхъ и является кристаллическій многогранникъ.

Очевидно, этимъ путемъ можно получить только общее представленіе о порядкѣ появленія кристаллическихъ плоскостей—но оно указываетъ намъ, *какія плоскости должны были бы появляться, если бы кристаллическіе многогранники служили простымъ проявленіемъ внутреннихъ векторіальныхъ силъ вещества*, его внутренняго строенія. Такими должны были бы быть только плоскости съ простыми характеристиками. Въ дѣйствительности кромѣ нихъ появляются отдѣльныя болѣе сложныя простыя формы. Появленіе ихъ зависитъ, какъ увидимъ, въ значительной степени отъ своеобразныхъ свойствъ поверхности кристалла (капиллярныхъ свойствъ твердаго тѣла); эти поверхностныя «силы» вызываютъ многочисленныя отклоненія отъ закона Гаюи.

Гипотеза Грассманна связываетъ законъ Гаюи съ внутреннимъ строеніемъ кристалла, въ то же время совершенно оставляя въ сторонѣ атомистическія представленія Гаюи. Подобно другимъ принятымъ мною въ основаніе, при изложеніи кристаллографіи, принципамъ (§ 63), она не связана ни съ атомистическими, ни съ динамическими представленіями о веществѣ. Какъ показалъ уже Грассманнъ всѣ его выводы легко могутъ быть выражены, какъ динамическимъ, такъ и атомистическимъ языкомъ.

198. Во всемъ нашемъ разсмотрѣніи мы предполагали три первичныя плоскости (001), (010), (100) (и основную—(111)) произвольно взятыми. Въ дѣйствительности онѣ находятся въ тѣснѣйшей связи съ симметріей. Первые изслѣдователи, не имѣвшіе понятія о симметріи, выбирали за координатныя и основныя плоскости такія, которыя 1) часто встрѣчаются или 2) даютъ наиболѣе простые индексы для отнесенныхъ къ нимъ всѣхъ другихъ плоскостей тѣла.

При этомъ совершенно неожиданно оказалось, что всѣ такія координатныя и основныя плоскости совпадаютъ или правильно расположены по отношенію къ элементамъ симметріи. Одно уже это явленіе доказываетъ съ неопровержимой ясностію, что силовые

векторы кристаллическаго многогранника располагаются въ строгой зависимости отъ симметріи строенія и что *координатныя оси, выбранныя согласно симметріи* (§ 123 сл.) *совпадаютъ съ основными векторами* (§ 194).

Въ настоящее время мы выбираемъ гдѣ это возможно [1]), координатныя и основныя плоскости въ строгой зависимости отъ симметріи, совершенно не обращая вниманія на то, обычна или рѣдка данная плоскость. И однако въ подавляющемъ большинствѣ случаевъ, почти для всѣхъ веществъ, плоскости многогранниковъ получаютъ при этомъ наименьшія характеристики; слѣдовательно основные векторы совпадаютъ съ координатными осями, и обычность плоскостей поліэдра зависитъ отъ его симметріи. Исключенія крайне рѣдки и объясняются вторичными возмущающими вліяніями. Къ этому вопросу я вернусь ниже, при изученіи явленій кристаллизаціи.

199. **Энантіоморфные кристаллическіе многогранники. Геометрическія свойства векторовъ.** Необходимо обратить вниманіе еще на одно проявленіе симметріи въ кристаллическихъ многогранникахъ, тѣсно связанное съ нѣкоторыми физическими свойствами кристалловъ.

Въ кристаллическихъ строеніяхъ, не обладающихъ элементами сложной симметріи, могутъ, какъ оказывается, наблюдаться для нѣкоторыхъ простыхъ формъ и комбинацій, многогранники подобные, но несовмѣстимые другъ съ другомъ. Эти многогранники являются попарно какъ бы *зеркальнымъ отраженіемъ другъ друга* и никогда не могутъ быть расположены въ пространствѣ въ строго параллельномъ положеніи. Вмѣстѣ съ тѣмъ характеристики ихъ плоскостей отличаются только знаками и мѣстомъ въ индексѣ; по внѣшней формѣ оба поліэдра совершенно схожи — ихъ гранные углы одинаковы, но ребра направлены въ разныя стороны. Согласно термину, введенному Науманномъ (1855), удобно называть два такихъ многогранника *энантіоморфными*.

Подобнаго рода симметрію мы легко можемъ наблюдать въ симметріи правой и лѣвой руки нашего тѣла. Онѣ вполнѣ схожи, явля-

---

[1]) Всегда въ правильной системѣ и въ большинствѣ случаевъ (для нѣкоторыхъ осей всегда) въ гексагональной, квадратной, ромбической и моноклинической. Только въ триклинической системѣ выборъ координатныхъ осей не регулируется симметріей. См. главу V.

ются зеркальнымъ изображеніемъ другъ друга, но никогда нельзя привести правую кисть руки въ положеніе параллельное лѣвой кисти или наоборотъ. Онѣ подобны, но несовмѣстимы. Если же взять отраженіе въ зеркалѣ одной кисти руки, напр. правой, то съ этимъ отраженнымъ зеркальнымъ изображеніемъ легко можно привести въ параллельное положеніе другую, лѣвую кисть руки.

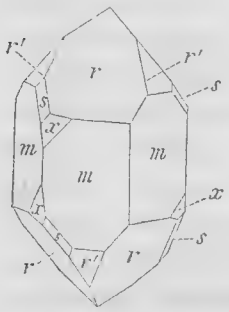


Рис. 52.

200. Существованіе такихъ несовмѣстимыхъ подобныхъ кристаллическихъ многогранниковъ было замѣчено уже въ началѣ XIX столѣтія, при изученіи кристаллической формы кварца (SiO_2, $\lambda^3 3L^2$). Такого рода поліэдры были тогда же описаны Вейссомъ и другими. Вниманіе они привлекли, однако, только въ 1820 году, когда Д. Гершель нашелъ, что нѣкоторые кварцы вращаютъ плоскость поляризаціи свѣта вправо, а другіе влѣво, причемъ кристаллы, право вращающіе, даютъ комбинаціи (рис. 44), которыя являются зеркальнымъ отраженіемъ комбинацій лѣво вращающихъ кварцевъ (рис. 52) [1]). Эти двѣ комбинаціи не могутъ быть поставлены другъ съ другомъ въ параллельное положеніе, благодаря существованію небольшихъ площадокъ трапецоэдровъ $\{h\,k\,\bar{i}\,l\}$, (въ данномъ случаѣ x, равныхъ $\{51\bar{6}1\}$ и $\{65\bar{1}1\}$), при чемъ эти трапецоэдры для лѣвыхъ кварцевъ несовмѣстимы съ трапецоэдрами правыхъ кварцевъ также, какъ несовмѣстимы между собою правая и лѣвая руки. Пользуясь этимъ сравненіемъ, Гершель придалъ этимъ трапецоэдрамъ неудачныя названія *правыхъ и лѣвыхъ простыхъ формъ*. Въ виду того, что эти названія не соотвѣтствуютъ расположенію въ пространствѣ другихъ подобныхъ несовмѣстимыхъ простыхъ формъ и вводятъ совершенно лишнюю запутанность въ изучаемыя явленія, я не буду въ дальнѣйшемъ изложеніи употреблять эти довольно распространенные термины.

201. Дальнѣйшій шагъ въ разъясненіи этого вопроса былъ сдѣланъ въ концѣ 1840-хъ годовъ, когда начались многолѣтнія работы Пастёра надъ производными различныхъ органическихъ кислотъ— винныхъ, молочныхъ, яблочныхъ и другихъ, вращающихъ плоскость

---

[1]) На рис. 52 обозначеніе плоскостей аналогично рис. 44.

поляризаціи свѣта въ жидкомъ состояніи. Пастёръ (1848 — 1864) замѣтилъ, что вещества, вращающія вправо плоскость поляризаціи свѣта, даютъ при кристаллизаціи многогранники, энантіоморфные (§ 199) съ поліэдрами лѣвыхъ изомеровъ тѣхъ же соединеній. Пастёръ уже обратилъ вниманіе на то, что такіе поліэдры никогда не обладаютъ плоскостями симметріи. Подобно кварцу (§ 200) и въ этихъ веществахъ (кристаллизуются въ двуосныхъ системахъ (§ 130) оказалось возможнымъ различить правые и лѣвые многогранники, причемъ Пастёръ устанавливалъ свои вещества такъ, что правые изомеры имѣли въ октантѣ XYZ тѣ плоскости, какія лѣвые имѣли въ октантѣ XYZ, такъ напр. рис. 53a даетъ обычную комбинацію

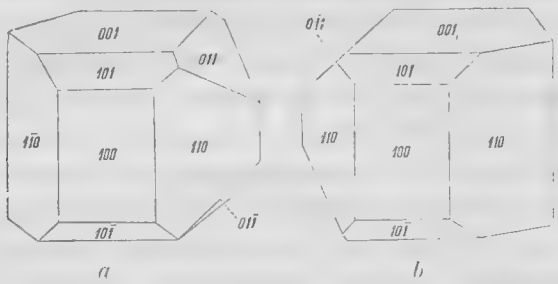


Рис. 53.

правой винной кислоты ($C_4 H_6 O_6$, λ^2) съ (011) и (01$\bar{1}$) (правая форма {011}), тогда какъ рис. 53b представляетъ такую же обычную комбинацію лѣвой винной кислоты, въ которой нѣтъ (011) и (011), а имѣются только (011) и (011) — лѣвая простая форма {0$\bar{1}$1}. Обѣ эти комбинаціи никогда не могутъ быть поставлены въ параллельное другъ съ другомъ положеніе. Такое совпаденіе оптическихъ правыхъ и лѣвыхъ изомеровъ съ появленіемъ комбинацій, обладающихъ соотвѣтственно плоскостями въ правыхъ или лѣвыхъ октантахъ, вызвало своеобразныя натурфилософскія представленія Пастёра о строеніи матеріи. Однако, вскорѣ кристаллографическія изслѣдованія другихъ веществъ указали, что далеко не всегда зависимость между кристаллической формой и структурой вещества можетъ быть выражена въ формѣ, открытой Пастёромъ.

202. Вскорѣ же послѣ первыхъ работъ Пастёра изученіе кристаллизаціи хлорноватокислыхъ и бромноватокислыхъ солей привело къ открытію тетартоэдріи правильной системы (§ 127).

Еще въ 1822 году Мосъ доказывалъ возможность существованія многогранниковъ правильной системы [1]), которые никогда не наблюдались въ природѣ и должны были содержать въ четверо меньше плоскостей, чѣмъ простая форма съ максимальнымъ ихъ количествомъ (сорокавосьмигранникъ, $\{hkl\}$). Мосъ возстановилъ форму этихъ простыхъ многогранниковъ, такъ наз. тетартоэдровъ (рис. 45). Нѣтъ надобности останавливаться на выводѣ Моса; онъ основанъ на чисто эмпирическомъ обобщеніи Вейсса, показавшаго, что нѣкоторые поліэдры выводятся изъ другихъ многогранниковъ, если только, вслѣдствіе особаго строенія вещества, половина плоскостей этихъ послѣднихъ не развивается въ извѣстномъ закономѣрномъ порядкѣ (случаи такъ-наз. *геміэдріи).* Разсматривая возможные случаи такого исчезанія половины плоскостей Вейссъ, вывелъ изъ голоэдрическихъ формъ соотвѣтствующія имъ геміэдріи (§ 127). Проникнутый идеями о стремленіи процессовъ природы выражаться въ простыхъ числахъ (§ 190) Мосъ предположилъ возможность повторенія того же явленія и полученія многогранниковъ съ $1/4$, $1/8$... количествомъ плоскостей исходной формы *(тетартоэдрія, огдоэдрія).* Работа Моса не обратила на себя должнаго вниманія. Лишь въ 1854 году Марбахъ случайно замѣтилъ, что кубическіе кристаллы $Na\ ClO_3$, правильной системы, вращаютъ плоскость поляризаціи свѣта, причемъ одни кристаллы вращаютъ ее вправо, другіе влѣво на тотъ же уголъ. Въ отличіе отъ веществъ, изученныхъ Пастёромъ, эта способность въ $Na\ ClO_3$ свойственна только кристалламъ. Открытіе Марбаха обратило вниманіе на незадолго передъ тѣмъ сдѣланныя наблюденія Раммельсберга (1853), доказавшаго, что кристаллы этого вещества не отвѣчаютъ идеямъ геміэдріи, развитымъ Вейссомъ и имъ противорѣчатъ. Исходя изъ наблюденій Марбаха, Науманнъ (1855) объяснилъ это противорѣчіе и доказалъ, что здѣсь встрѣтился случай тетартоэдріи, предсказанный Мосомъ. По аналогіи съ наблюденіемъ Гершеля (§ 200) онъ высказалъ предположеніе, что въ лѣво вращающихъ веществахъ будутъ встрѣчаться одни тетартоэдры (лѣвые), а въ правыхъ другіе имъ энантіоморфные (правые). И дѣйствительно въ комбинаціяхъ, какъ вскорѣ показалъ Марбахъ поліэдры правыхъ и лѣвыхъ кристалловъ $Na\ ClO_3$ оказались энантіоморфными.

---

[1]) Строеніе $3\lambda^2\ 4L^3$, тогда неизвѣстное.

Это открытіе имѣло огромное значеніе въ исторіи кристаллографіи. Здѣсь встрѣтились съ ярко выраженнымъ случаемъ *научнаго предсказанія*. Поэтому, понятно, что открытіе Марбаха-Раммельсберга было принято за доказательство вѣрности идей господствовавшей въ то время формальной кристаллографіи и что оно въ значительной мѣрѣ способствовало ея упроченію. И однако это предсказаніе было сдѣлано ощупью, путемъ чисто морфологическаго изученія внѣшней формы; существовавшій уже въ то время въ ученіи о симметріи совершенно общій выводъ энантіоморфныхъ формъ, исходя изъ строенія вещества, остался совершенно незамѣченнымъ и непонятымъ современниками.

203. Но прежде, чѣмъ перейти къ его изложенію, необходимо остановиться еще на одномъ явленіи. Гершель для $\{hikl\}$ строенія $\lambda^3\ 3L^2$ (въ кварцѣ) и Пастёръ для соединеній двуосныхъ системъ, указали, что оптическіе правые изомеры развиваютъ въ кристаллахъ плоскости преимущественно въ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ частяхъ пространства (октантахъ), причемъ въ нихъ не появляются плоскости для лѣвыхъ изомеровъ. Наиболѣе просто выражено это явленіе для кристаллическихъ системъ съ тремя координатными осями. Здѣсь для ромбической системы по Пастёру, для правыхъ изомеровъ, развиваются преимущественно площадки въ октантахъ XYZ, $X\acute{Y}Z$, $X\acute{Y}\acute{Z}$, $XY\acute{Z}$, тогда какъ для лѣвыхъ изомеровъ онѣ отсутствуютъ въ этихъ октантахъ и развиваются въ остальныхъ четырехъ. Но, однако, такое очень простое и ясное объясненіе будетъ совершенно инымъ для веществъ строенія λ^2: здѣсь напримѣръ для правыхъ изомеровъ характерны октанты XYZ, XYZ, XYZ, XYZ. Такимъ образомъ въ разныхъ системахъ одни и тѣ же октанты то характеризуютъ правые изомеры, то лѣвые. Для тетартоэдровъ уже совершенно нѣтъ связи октантовъ съ оптической изомеріей, ибо какъ въ лѣвыхъ, такъ и въ правыхъ изомерахъ могутъ встрѣчаться плоскости во всѣхъ октантахъ, и въ то же время давать энантіоморфныя фигуры.

Я не буду останавливаться на доказательствѣ этого явленія для тетартоэдровъ, а остановлюсь на вполнѣ аналогичномъ, болѣе общемъ случаѣ энантіоморфныхъ формъ $\{hkl\}$ строенія $3\lambda^4\ 4L^3\ 6L^2$ той же системы, такъ-наз. *гироэдровъ*. Они были выведены въ 1820-хъ гг. Мосомъ, но только въ 1884 году Г. Чермакъ впервые наблюдалъ ихъ въ природѣ, въ кристаллахъ нашатыря. Существованіе здѣсь

$3\lambda^4$ ясно показываетъ, что въ многогранникѣ всегда должны быть плоскости во всѣхъ октантахъ; ибо, если появится (hkl), то вслѣдствіе существованія $\lambda^4 = Z$ должны одновременно съ ней появиться плоскости во всѣхъ четырехъ верхнихъ октантахъ, именно $(\bar{k}hl)$, $(\bar{h}\bar{k}l)$ и $(k\bar{h}l)$. Легко убѣдиться что точно также связаны съ ними и всѣ нижніе октанты. Получается въ концѣ концовъ закрытая простая форма такъ-наз. *гироэдръ*, при чемъ можно различать правый гироэдръ $\{hkl\}$ характерный для правыхъ изомеровъ и лѣвый гироэдръ $\{khl\}$, каждый изъ которыхъ состоитъ изъ 24 граней (рис. 54a-b, a—«правый» {123} и b—«лѣвый» {213}). Оба гиро-

Рис. 54.

эдра имѣютъ плоскости во всѣхъ октантахъ. Ясно, что здѣсь отпадаетъ та связь между лѣвыми и правыми изомерами и октантами, какую предполагалъ Пастёръ. Названіе «лѣвый» и «правый» не имѣютъ ничего общаго съ значеніемъ этихъ словъ.

204. Въ концѣ концовъ идя чисто эмпирическимъ путемъ удалось къ началу 1860-хъ годовъ довольно точно опредѣлить геометрическій характеръ тѣхъ многогранниковъ, которые могутъ являться въ двухъ энантіоморфныхъ разностяхъ; какъ указалъ Пастёръ они не должны обладать плоскостями симметріи (§ 201) и какъ вывелъ Марбахъ не могутъ обладать и центромъ симметріи. Однако, этотъ эмпирическій выводъ далеко не охватывалъ всѣхъ случаевъ и уже раньше Гессель и Бравэ, исходя изъ законовъ симметріи гораздо шире и полнѣе рѣшили ту же задачу, къ которой вышеназванные изслѣдователи подошли труднымъ, кружнымъ путемъ. Изъ ученія о симметріи слѣдуетъ, что *такіе энактіоморфные многогранники могутъ встрѣчаться во многихъ—именно 11—строеніяхъ, во всѣхъ тѣхъ, въ ко-*

торыхъ нѣтъ элементовъ сложной симметріи. Выводя изъ символа симметріи существующія въ этихъ строеніяхъ простыя формы (подобно §§ 179 сл.) мы замѣтимъ въ нихъ—и только въ нихъ—нѣкоторыя такія закрытыя простыя формы, которыя являются въ двухъ энантіоморфныхъ разностяхъ. Выводъ этотъ сдѣланъ въ слѣдующей 5-ой главѣ, въ соотвѣтственныхъ строеніяхъ.

Въ то же время разсматривая возможныя комбинаціи многогранниковъ—только въ этихъ 11 строеніяхъ мы встрѣтимся со случаями энантіоморфныхъ комбинацій.

Причиной этого явленія можно считать своеобразныя свойства векторовъ, которыя обусловливаются отсутствіемъ въ тѣлѣ элементовъ сложной симметріи [1]) (см. § 208).

205. Для выясненія этого вопроса необходимо нѣсколько остановиться на *геометрическихъ свойствахъ кристаллическихъ векторовъ* [2]) (§§ 44, 128).

Въ каждой линіи въ пространствѣ можно различить, по крайней мѣрѣ, два вектора; одинъ, который въ линіи AB идетъ отъ A къ B и другой, который въ той же линіи идетъ отъ B къ A. Свойства этихъ векторовъ могутъ быть—въ зависимости отъ симметріи—равны или различны. Для вещества, въ которомъ нѣтъ элементовъ симметріи они не могутъ быть одинаковыми для всѣхъ свойствъ. Когда свойства этихъ векторовъ различны, то они могутъ различаться или *количественно*, напр. сопротивленіе тѣла какому-нибудь движенію отъ A къ B или отъ B къ A можетъ не быть одинаково [3]) или

---

[1]) Легко можно сообразить, что и въ геміэдріи триклинической системы мы найдемъ энантіоморфныя комбинаціи; слѣдовательно это свойство не есть слѣдствіе нахожденія въ тѣлѣ элементовъ простой симметріи—ихъ можетъ и не быть.

[2]) Впервые геометрическія свойства векторовъ были выведены Гесселемъ (1830) путемъ дальнѣйшаго логическаго развитія взглядовъ Грассманна (1829). Но эта часть работы Гесселя не была имъ самимъ развита до конца и до сихъ поръ не обратила на себя должнаго вниманія. Позднѣе ученіе о разныхъ векторахъ—въ связи съ физическими теоріями Максуэлля—было въ иной формѣ—менѣе полно, чѣмъ у Гесселя—примѣнено въ кристаллографіи Фойхтомъ (1898). У Карстена, Кюри, Гольдшмидта и т. д. мы также встрѣчаемся съ изслѣдованіемъ свойствъ кристаллическихъ векторовъ.

[3]) Такой—очень рѣдкій случай наблюдается въ нѣкоторыхъ явленіяхъ такъ-назыв. твердости кристаллическихъ граней. Здѣсь явленіе, однако, до извѣстной степени связано со свойствами поверхностнаго слоя (см. ниже твердость).

качественно. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ линія будетъ какъ бы обладать *полярностію*, ея два конца будутъ неодинаковы и слѣдовательно AB и BA въ однородномъ тѣлѣ не могутъ быть одинаковы. Удобно называть такіе векторы *полярными.* Качественное различіе векторовъ кристалла наиболѣе рѣзко выражено; такъ напр. при этомъ въ кристаллѣ концы одной и той же линіи при охлажденіи или нагрѣваніи развиваютъ электричество разнаго знака (явленія такъ-наз. пироэлектричества) или при кристаллизаціи на концахъ линіи развивается перпендикулярно къ ней только одна плоскость— (т. е. два ея полярныхъ вектора неодинаковы—§ 194). Такой случай мы имѣемъ напр. въ кристаллахъ винной кислоты (рис. 53), гдѣ линія, перпендикулярная къ (011) или (011) имѣетъ плоскость только съ одного конца. Полярные векторы могутъ наблюдаться только въ нѣкоторыхъ строеніяхъ, именно въ тѣхъ, въ которыхъ нѣтъ центра симметріи (§ 128). Во всѣхъ же строеніяхъ съ центромъ симметріи оба вектора одной и той же линіи, проходящей внутри кристаллическаго вещества, неизбѣжно идентичны, иначе въ тѣлѣ не можетъ быть центра симметріи. Но къ разсмотрѣнію полярныхъ векторовъ, мы вернемся ниже, ибо строенія, ими обладающія, подобно энантіоморфнымъ структурамъ измѣняютъ проявленіе закона Гаюи (т.-наз. *гемиморфизмъ* § 218).

206. Однако, на этомъ различіе векторовъ одной и той же линіи не кончается. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ возможно по одному и тому же *направленію* различить два разныхъ вектора и, слѣдовательно по данной линіи отличить ихъ *четыре.*

Для выясненія такого характера векторовъ необходимо нѣсколько остановиться на тѣхъ физическихъ явленіяхъ, какія могутъ наблюдаться въ кристаллѣ.

Векторъ въ кристаллѣ не есть абстрактное геометрическое направленіе; этимъ кристаллическій многогранникъ рѣзко отличается отъ инертнаго многогранника геометріи (§ 193). Каждый векторъ соотвѣтствуетъ опредѣленной, извѣстной величинѣ физическихъ свойствъ кристалла, такъ какъ онъ является результатомъ неизмѣнной группировки частичныхъ его силъ. Однако, многія явленія, изучаемыя по вектору, складываются изъ движеній, происходящихъ въ средѣ, окружающей векторъ. Векторъ даетъ только направленіе извѣстнаго состоянія эфира или вещества, опредѣленнаго движенія,

происходящаго въ ближайшей окружающей кристаллической средѣ. Очевидно величина даннаго явленія по вектору зависитъ отъ свойствъ этой ближайшей къ нему среды. Возьмемъ, напримѣръ, оптическія свойства кристалловъ и представимъ себѣ, что векторъ совпадаетъ съ свѣтовымъ лучемъ. Свѣтовой лучъ есть нѣкоторое направленіе, по которому изучается передача волнообразнаго колебанія свѣтоваго эфира; колебанія точекъ эфира происходятъ въ плоскости, перпендикулярной къ лучу. Слѣдовательно то сопротивленіе, какое будетъ встрѣчать свѣтовой лучъ въ разныхъ векторахъ кристалла зависитъ отъ строенія окружающаго его пространства, въ которомъ происходятъ колебанія точекъ эфира.

207. Движенія точекъ эфира могутъ идти вокругъ вектора (въ плоскости къ нему перпендикулярной) въ разныхъ направленіяхъ и строеніе среды можетъ оказать движеніямъ одинаковое или различное сопротивленіе по разнымъ направленіямъ. Эти движенія идутъ по траекторіямъ опредѣленной формы (поляризованный свѣтъ — по траекторіямъ линейнымъ, круговымъ, эллиптическимъ) или неопредѣленной, сложной (обыкновенный свѣтъ). Въ томъ и другомъ случаѣ необходимо различать *два* направленія такихъ движеній: *посолонное* (на лѣво) и *противусолонное* (слѣва на право) [1]).

Эти два различныхъ направленія движенія могутъ или быть идентичны между собою или отличаться по своей скорости, благодаря различію сопротивленія, встрѣчаемаго ими въ средѣ, окружающей векторъ. Конечно такое различіе или тождество сопротивленія — а

---

[1]) Мало употребительныя выраженія „посолонное“ и „противусолонное“ движеніе превосходно передаютъ понятія, для которыхъ очень часто употребляютъ образныя сравненія съ правой и лѣвой рукой или со временъ Ампера въ физикѣ сравниваютъ съ движеніемъ стрѣлки часовъ („по часовой стрѣлкѣ“ и „противъ часовой стрѣлки“). Однако, въ русскомъ языкѣ существуетъ старинное слово „пóсолонь“ — движеніе по солнцу; въ связи съ разнообразными теологическими спорами и расколами въ церкви Московской Руси это слово, начиная съ XV вѣка, пріобрѣло широкое и строго опредѣленное значеніе въ русскомъ народѣ и церковно-общественной литературѣ; тогда же выработались и соотвѣтственныя прилагательныя. Тоже слово (и глаголъ) существуетъ и въ морскомъ языкѣ поморовъ. Жизнь русскаго народа, выработала въ этихъ словахъ выраженіе новому научному понятію, для обозначенія котораго поэтому слѣдуетъ воспользоваться сокровищницей русскаго языка, а не выдумывать новыя образныя выраженія.

слѣдовательно различіе или тождество векторовъ—можетъ существовать какъ для свѣтовыхъ, такъ и для всѣхъ прочихъ свойствъ вещества.

Такимъ образомъ для данной линіи, проведенной между какими нибудь точками A и B, мы имѣемъ: 1) векторъ AB съ посолоннымъ характеромъ, т. е. вокругъ котораго движеніе *легче* идетъ пóсолонь *(посолонный векторъ)*, 2) Векторъ AB съ противусолоннымъ характеромъ т. е. вокругъ котораго *легче* идетъ движеніе противъ солнца—*(противусолонный векторъ)*, 3) и 4)—соотвѣтственно посолонный и противусолонный векторы BA. Такимъ образомъ *для данной линіи могутъ наблюдаться четыре разныхъ вектора.* Можно легко убѣдиться, что *это возможно только въ кристаллическихъ строеніяхъ, не обладающихъ элементами сложной симметріи*, тогда какъ въ строеніяхъ со сложной симметріей посолонные и противусолонные векторы AB (и соотвѣтственно тѣ же векторы BA) идентичны.

208. Обратимся къ строеніямъ, обладающимъ сложной симметріей; легко видѣть, что всегда въ нихъ посолонный и противусолонный векторы одного направленія линіи идентичны. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ голоэдрію триклинической системы, которая характеризуется (§ 127) существованіемъ центра симметріи. Мы знаемъ, что $c = \infty\, L^2$ (§ 98), слѣдовательно, поворотъ вокругъ всякой линіи на 180° приводитъ данную точку въ совпаденіе съ зеркальнымъ изображеніемъ такой же точки въ плоскости, перпендикуляр-

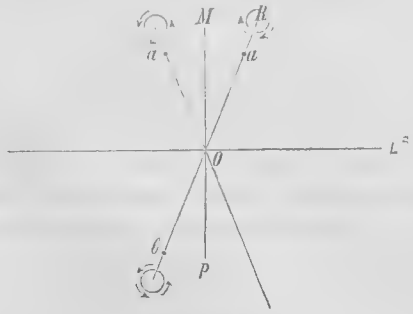


Рис. 55.

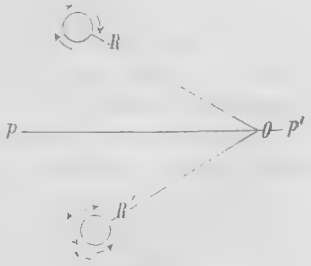


Рис. 56.

ной къ зеркалу. Возьмемъ какую-нибудь точку a, (рис. 55) на векторѣ OR обладающемъ противусолоннымъ характеромъ, въ такомъ случаѣ зеркальное ея изображеніе будетъ другой точкой a', принад-

лежащей уже къ посолонному вектору, ибо зеркальное изображеніе посолоннаго движенія будетъ неизбѣжно противусолоннымъ движеніемъ. Съ этимъ зеркальнымъ изображеніемъ, напримѣръ въ зеркалѣ перпендикулярномъ къ MP, должна (благодаря существованію c) совпадать точка того же вектора OR—точка b. Эта точка, слѣдовательно, должна принадлежать къ посолонному вектору т. е. векторъ OR одновременно долженъ обладать свойствами и посолоннаго и противусолоннаго вектора. Вообще, слѣдовательно, посолонные и противусолонные векторы въ такомъ тѣлѣ идентичны и совпадаютъ другъ съ другомъ.

То же самое существуетъ и для тѣлъ, обладающихъ плоскостію симметріи, напримѣръ для строенія π (моноклинической системы). Пусть Pp' (рис. 56)—будетъ слѣдомъ плоскости симметріи. Какой-нибудь противусолонный векторъ OR долженъ совпадать въ зеркалѣ со своимъ зеркальнымъ изображеніемъ OR'—но зеркальное изображеніе противусолоннаго вектора есть посолонный векторъ. Слѣдовательно, для того, чтобы противусолонный векторъ совпалъ съ зеркальнымъ изображеніемъ, обладающемъ свойствами противусолоннаго же вектора (иначе PP' не будетъ слѣдомъ плоскости симметріи), необходимо, чтобы противусолонный векторъ OR обладалъ свойствами посолоннаго вектора, оставаясь противусолоннымъ—т. е. чтобы не было разницы между движеніемъ посолонь и противъ солнца по отношенію къ этому вектору.

То же самое легко доказать для строеній, обладающихъ J^4. Слѣдовательно, *всѣ строенія, обладающія хотя бы однимъ элементомъ сложной симметріи, не позволяютъ отличать векторы съ движеніемъ посолонь и противъ солнца.*

209. Совсѣмъ иное существуетъ для строеній безъ элементовъ сложной симметріи. Остановимся на двухъ примѣрахъ — наименѣе богатаго симметріей строенія λ^2—моноклинической системой и наиболѣе симметричнаго строенія $3\lambda^4\,4L^3\,6L^2$—правильной системы.

Возьмемъ случай строенія *моноклинической системы.* Въ немъ при поворотѣ на 180^0 вокругъ λ^2 какой-нибудь посолонный векторъ OR долженъ совпадать съ другимъ посолоннымъ же векторомъ OR', расположеннымъ къ λ^2 подъ одинаковымъ съ OR угломъ. Никогда и ни при какихъ условіяхъ посолонный векторъ не можетъ совпасть съ противусолоннымъ или со своимъ зеркальнымъ

изображеніемъ. Слѣдовательно въ симметріи вещества нѣтъ условій, которыя бы вызывали тождество посолонныхъ и противусолонныхъ векторовъ; можно всегда отличать ихъ другъ отъ друга. Для каждаго кристалла возможны двѣ разности: одна, состоящая изъ посолонныхъ векторовъ (въ которомъ движеніе пóсолонь вокругъ всякаго вектора встрѣчаетъ *меньшее* сопротивленіе, чѣмъ движеніе противъ солнца), связанныхъ между собою λ^2—и другая, состоящая изъ противусолонныхъ векторовъ, (въ которой движеніе пóсолонь встрѣчаетъ большее сопротивленіе, чѣмъ движеніе противъ солнца), связанныхъ между собою той же λ^2 [1]).

210. То же самое въ общихъ чертахъ вѣрно и для сложнаго строенія $3\lambda^4\ 4L^3\ 6L^2$ *правильной системы*. И здѣсь посолонные и противусолонные векторы всегда независимы другъ отъ друга и существующіе въ строеніи элементы симметріи связываютъ между собою только векторы одного рода.

Достаточно разсмотрѣть это явленіе для одного какого-нибудь вектора — напримѣръ для какой-нибудь изъ координатныхъ осей, напр. X (т. е. λ^4). Благодаря существованію $\lambda^4 = Z$ этотъ, положимъ посолонный, векторъ при поворотѣ на 90° совпадетъ съ посолоннымъ же векторомъ Y, при дальнѣйшемъ поворотѣ на 90° опять совпадетъ съ посолоннымъ X и т. д. $3\lambda^4$ не вызываютъ связи между векторами разнаго характера.

Точно также не вызовутъ ее и другіе существующіе элементы симметріи $4L^3\ 6L^2$. Достаточно разсмотрѣть явленіе въ одномъ октантѣ, напр. въ XYZ: вслѣдствіе существованія $3\lambda^4$ то же самое должно повторяться во всѣхъ семи остальныхъ (§ 108) октантахъ. Въ серединѣ этого октанта выйдетъ L^3; она свяжетъ X съ осями (векторами) Y и Z — но не измѣнитъ посолоннаго характера этихъ векторовъ; они всѣ должны быть одного и того же характера и совпадать при вращеніи вокругъ L^3 на 120°; остаются еще въ октантѣ $3L^2$ (§ 109), которыя выходятъ между X и Z, X и Y, Y и Z: онѣ также связываютъ эти три вектора X, Y и Z, не мѣняя ихъ характера (въ данномъ случаѣ—посолоннаго). Итакъ всѣ имѣющіеся

---

[1]) Очевидно не можетъ быть кристалла, въ которомъ бы чередовались противусолонные и посолонные векторы; такой кристаллъ не обладалъ бы однородностію строенія.

въ тѣлѣ элементы симметріи связываютъ только посолонные X, Y и Z и посолонные $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, а противусолонные векторы обоихъ направленій отъ нихъ независимы.

Такимъ образомъ всѣ эти элементы симметріи всегда связываютъ между собою только векторы одного и того же характера; мы имѣемъ и здѣсь для каждаго вещества *двѣ* разности строенія $3\lambda^4\ 4L^3\ 6L^2$: 1) съ посолонными векторами и 2) съ противусолонными векторами.

То же самое вѣрно для всѣхъ строеній безъ элементовъ сложной симметріи, *вездѣ среди нихъ можно различить для данной линіи четыре вектора.* Нѣкоторыя изъ получаемыхъ для этихъ строеній простыхъ формъ энантіоморфны.

211. Однако, явленіе не ограничивается только такой правильностію. Уже первые наблюдатели отмѣтили тутъ ясное — иногда крайне рѣзкое—вліяніе структуры вещества на появленіе въ тѣлѣ тѣхъ или иныхъ простыхъ формъ. Общій законъ Гаюи—о появленіи въ тѣлѣ формъ съ простыми индексами—здѣсь получилъ свое первое ограниченіе, такъ какъ среди этихъ — равнозначныхъ, съ точки зрѣнія закона Гаюи, простыхъ формъ—однѣ обычны для разностей съ посолонными векторами, а другія для разностей съ противусолонными векторами. Уже Гершель замѣтилъ, что изъ трапецоэдровъ съ одинаковыми характеристиками лѣвовращающіе кварцы развиваютъ однѣ плоскости, а правовращающіе другіе, при чемъ плоскости, развитыя въ лѣвыхъ кварцахъ, отсутствуютъ въ правыхъ и наоборотъ. Слѣдовательно, въ структурѣ этихъ тѣлъ существуютъ условія, которыя изъ формъ съ простыми характеристиками благопріятствуютъ появленію однихъ и мѣшаетъ развитію другихъ.

Особенно рѣзко это явленіе выражено въ веществахъ, посолонный или противусолонный характеръ которыхъ тѣсно связанъ со строеніемъ химической частицы. Уже Пастеръ (§ 201) замѣтилъ, что въ лѣвыхъ изомерахъ не появляются (строеніе λ^2) плоскости $(h\,k\,l)$ или $(\bar{h}\,k\,l)$, а въ правыхъ изомерахъ соотвѣтственно $(h\,\bar{k}\,l)$ и $(\bar{h}\,\bar{k}\,l)$. Онъ примѣнилъ даже для отдѣленія правыхъ и лѣвыхъ изомеровъ способъ отбора кристалловъ съ площадками въ правыхъ и лѣвыхъ октантахъ XYZ и $\overline{XYZ}$ и ему удалось этимъ путемъ въ цѣломъ рядѣ случаевъ безошибочно раздѣлить оптическіе изомеры. Въ 1874 году Лебель и Вант-Гоффъ независимо другъ отъ друга

связали существованіе двухъ различныхъ изомеровъ органическихъ соединеній съ химической формулой данныхъ тѣлъ и указали, что распредѣленіе атомовъ или атомныхъ группъ въ пространствѣ для правыхъ и лѣвыхъ изомеровъ должно быть различно; эти работы вначалѣ не обратили на себя вниманія, но съ конца 1880-хъ годовъ въ связи съ нѣкоторыми другими случаями изомеровъ органическихъ соединеній, онѣ оказали могучее вліяніе на развитіе органической химіи и привели къ созданію стереохиміи. Указанная Пастеромъ для оптическихъ изомеровъ связь съ кристаллической формой вызвала, благодаря развитію стереохиміи, многочисленныя работы надъ кристаллической формой этихъ соединеній. Въ результатѣ этихъ работъ оказалось, что въ огромномъ большинствѣ точно изученныхъ случаевъ [1]), эти вещества кристаллизуются въ строеніяхъ безъ элементовъ сложной симметріи, причемъ для правыхъ изомеровъ характерны кристаллическіе многогранники повидимому съ противусолонными векторами, а для лѣвыхъ съ посолонными. Въ то же время въ поліэдрахъ правыхъ изомеровъ отсутствуютъ нѣкоторыя опредѣленныя простыя формы или комбинаціи, энантіоморфныя съ существующими въ лѣвыхъ изомерахъ; обратное явленіе наблюдается для этихъ послѣднихъ.

212. Оставляя пока въ сторонѣ причину появленія кристалловъ безъ элементовъ сложной симметріи въ такихъ органическихъ соединеніяхъ,—необходимо ближе остановиться на причинѣ, почему въ многогранникахъ съ разнымъ характеромъ векторовъ частота простыхъ формъ съ одинаковыми характеристиками различна. Нельзя считать ее связанной съ химическимъ составомъ (асимметрическимъ углеродомъ), ибо это явленіе замѣчено для веществъ, ничего общаго между собою не имѣющихъ—для SiO_2, HgS, $NaClO_3$, органическихъ соединеній съ асимметрическимъ углеродомъ, солей дитіоновой кислоты и т. д. Въ то же время нельзя считать это явленіе простымъ слѣдствіемъ посолоннаго или противусолоннаго характера векторовъ, такъ какъ въ веществѣ съ посолоннымъ характеромъ нельзя отри-

---

[1]) Въ послѣднее время Вальденъ (1900) пытался доказать, что такая связь отсутствуетъ. Однако, собранный имъ матеріалъ, не является точно изученнымъ съ кристаллографической точки зрѣнія, т. е. имѣетъ отрицательный характеръ. До сихъ поръ нѣтъ ни одного случая, гдѣ бы для такихъ оптическихъ изомеровъ было доказано существованіе элементовъ сложной симметріи.

цать возможности движенія противъ солнца по отношенію къ этимъ векторамъ въ окружающей ихъ средѣ; только такъ, повидимому, можно, напримѣръ, объяснить явленія интерференціи въ твердыхъ веществахъ, вращающихъ плоскость поляризаціи свѣта.

Да, наконецъ, и между характеромъ этого движенія и появленіемъ плоскостей въ октантахъ XYZ или $X\bar{Y}Z$ и т. п., очевидно, нѣтъ никакой прямой связи. Мы имѣемъ здѣсь явленіе, аналогичное преимущественному появленію въ кристаллахъ плоскостей съ простыми индексами; соотвѣтственно и причина его должна лежать *въ свойствахъ силовыхъ векторовъ* (§ 193). Возможность объяснить и предвидѣть это явленіе, пользуясь векторіальной гипотезой кристалла— составляетъ одну изъ важныхъ провѣрокъ ея реальнаго значенія въ кристаллографіи.

213. Прежде, чѣмъ перейти къ такой провѣркѣ, необходимо ближе ознакомиться съ характеромъ самаго явленія. Подобно нахожденію въ кристаллахъ плоскостей съ простыми и небольшими характеристиками (законъ Гаюи) и здѣсь мы имѣемъ дѣло съ явленіемъ довольно сложнымъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно наблюдать явленіе въ идеальной чистотѣ, такъ, напр., кристаллы правой винной кислоты—$C_4\ H_6\ O_6$—(строеніе λ^2) *никогда* не даютъ плоскостей въ октантахъ $X\bar{Y}Z$ и т. д. (§ 201)—а между тѣмъ для нихъ извѣстны $\{111\}$, $\{211\}$, $\{311\}$ (Дела Провостэ (1841), Вольффъ (1843), Пастёръ (1850) [1]). Тоже самое наблюдается и для нѣкоторыхъ другихъ производныхъ и солей правой винной кислоты, но далеко не для всѣхъ. Лѣвый аспарагинъ $C_4\ H_8\ N_2\ O_3 . H_2\ O$ (строеніе $3\lambda^2$) всегда даетъ только $\{1\bar{1}1\}$;— многочисленныя перекристаллизаціи этого вещества при различныхъ условіяхъ не дозволяютъ получить $\{111\}$ (С. П. Поповъ 1898 г.), который наблюдался, однако, какъ чрезвычайная рѣдкость Раммельсбергомъ. Также рѣзко выражено это явленіе для трапецоэдровъ (§ 200) въ правыхъ и лѣвыхъ кварцахъ ($\lambda^3\ 3L^2$). Въ этихъ и подобныхъ случаяхъ мы имѣемъ рѣзкое ограниченіе закона Гаюи, вносимое характеромъ векторовъ.

---

[1]) Раммельсбергъ (1882) наблюдалъ плохо выраженныя маленькія плоскости (закругленныя и матовыя) $\{211\}$. Многочисленныя кристаллизаціи этого вещества въ нашей лабораторіи не давали никогда плоскостей пирамидъ $\{h\bar{k}l\}$.

Въ другихъ случаяхъ мы не наблюдаемъ такого рѣзкаго вліянія, но все же однѣ изъ простыхъ формъ встрѣчаются значительно чаще, чѣмъ имъ энантіоморфныя, при чемъ порядокъ этой частоты выраженъ обратно въ кристаллахъ съ векторами разнаго характера. Такъ, напр., въ кисломъ правомъ виннокисломъ аммоніи $Am\ H\ C_4\ H_4\ O^6$. ($3\lambda^2$), {111} появляется гораздо рѣже, чѣмъ {111} и то лишь при кристаллизаціи изъ растворовъ съ избыткомъ винной кислоты (Краатцъ Кошлау 1887). Обратное происходитъ съ солью лѣвой кислоты; то же наблюдается для {011} правой винной кислоты и т. д.

Нерѣдки, наконецъ, и такіе случаи, въ которыхъ такое вліяніе наблюдается только для нѣкоторыхъ простыхъ формъ (resp. векторовъ) — тогда какъ другія появляются одинаково часто въ обѣихъ разностяхъ. Такъ, напр., {110} и {$1\bar{1}0$} въ правой винной кислотѣ обыкновенно появляются вмѣстѣ (Дела Провостэ 1843), {121} и {$1\bar{2}1$} въ муравьинокисломъ стронціи ($3\lambda^2$) появляются вмѣстѣ, а {111} и {$1\bar{1}1$} никогда не наблюдались на одномъ кристаллѣ (Алексатъ 1898) и т. п. Обыкновенно при этомъ обѣ энантіоморфныя формы развиты различно.

Послѣднюю группу представляютъ такого рода вещества, въ которыхъ какъ будто нельзя различить разныхъ условій для появленія энантіоморфныхъ формъ. Однако,обыкновенно, и здѣсь внимательное изученіе даетъ возможность найти различіе между обѣими формами. Такъ, напр., развитіе (§ 183) обѣихъ энантіоморфныхъ формъ бываетъ рѣзко различное какъ, напр., {$1\bar{2}1$} и {121} въ муравьинокисломъ стронціи (Алексатъ 1898). Иногда измѣненіе условій кристаллизаціи вызываетъ разныя свойства векторовъ, перпендикулярныхъ къ энантіоморфнымъ формамъ. Это наблюдается для $MgSO_4 . 7H_2\ O$ (строеніе $3\lambda^2$): при обычныхъ условіяхъ {111} и {$1\bar{1}1$} развиваются одинаково [1]), но изъ растворовъ, содержащихъ борныя соли — въ однихъ поліэдрахъ (лѣвыхъ) развивается {$1\bar{1}1$}, а въ правыхъ {111} (фонъ-Гауэръ 1878). Наконецъ, такое тождество наблюдается въ тѣхъ случаяхъ, когда энантіоморфныя формы слабо выражены, рѣдки и принадлежатъ къ формамъ съ

---

[1]) Въ этомъ веществѣ другія пирамиды (подобно муравьинокислому стронцію) позволяютъ различать двѣ энантіоморфныя разности.

относительно болѣе сложнымъ индексомъ (т. е. когда сильно вліяніе возмущающихъ причинъ — § 198). Такой случай даетъ кристаллизація лимоннокислаго натрія — $Na_3\ H_5\ C_6\ O_7\ 5H_2\ O$ (строеніе $3\lambda^2$), гдѣ плохо выраженные {121} и {121} (а также {131} и {1$\bar{3}$1}) наблюдаются всегда вмѣстѣ [1]) (Н. А. Скрицкій 1900) и т. д.

214. Изъ наблюденія фактовъ, такимъ образомъ слѣдуетъ, что вліяніе характера векторовъ на существованіе въ тѣлѣ энантіоморфныхъ формъ и комбинацій сильно колеблется какъ въ зависимости: 1) отъ состава вещества, такъ 2) отъ внѣшнихъ условій кристаллизаціи и въ 3) отъ тѣхъ или иныхъ векторовъ, перпендикулярно къ которымъ развиваются плоскости. Въ то же время, однако, въ общемъ это вліяніе рѣзко выражено и не можетъ быть объяснено причинами, лежащими въ сторонѣ отъ тѣхъ, которыя вызываютъ законъ Гаюи.

Исходя изъ векторіальнаго строенія кристалла легко можно выяснить эти кажущіяся отклоненія отъ закона Гаюи.

Во всѣхъ этихъ строеніяхъ не только наблюдается отсутствіе связи между посолонными и противусолонными векторами одной и той же *линіи*, но въ то же время въ одной и той же линіи оба посолонныхъ вектора (или соотв. противусолонныхъ) въ опредѣленныхъ случаяхъ независимы другъ отъ друга т. е. полярны. Здѣсь мы имѣемъ *по нѣкоторымъ линіямъ* два разныхъ полярныхъ вектора (§ 205). Слѣдовательно, величина векторіальныхъ силъ по обѣимъ направленіямъ этихъ линій будетъ различная, хотя оба направленія будутъ имѣть посолонный (resp. противусолонный) характеръ. Всѣ описанныя въ предыдущихъ §§ явленія получаютъ простое объясненіе, если мы предположимъ, что *въ разностяхъ съ посолонными векторами наибольшую величину имѣютъ по этимъ линіямъ одни полярные векторы, а въ противусолонныхъ разностяхъ имъ противоположные*. Если признать, что кристаллическій многогранникъ является результатомъ взаимодѣйствія векторіальныхъ молекулярныхъ силъ, такое предположеніе явится простымъ логическимъ выводомъ изъ этого положенія.

215. Возьмемъ, напр., самый простой случай—*строеніе* λ^2,—*моно*

---

[1]) {111} и {1$\bar{1}$1} въ этомъ тѣлѣ отсутствуютъ, что также указываетъ на особыя условія его поліэдровъ.

клинической системы и сперва остановимся на противусолонной ея разности. Въ такомъ случаѣ $\lambda^2 = Y$ есть всегда основной векторъ. Въ ней можно различить два направленія $Y\overline{Y}$ и $\overline{Y}Y$, не связанныхъ между собою симметріей этого строенія, а потому полярныхъ (§ 205); очевидно, одно изъ нихъ для частичныхъ силъ, вызывающихъ многогранникъ можетъ быть наибольшимъ, другой наименьшимъ. Всѣ явленія частоты формъ получаютъ простое объясненіе, если мы предположимъ что для противусолонныхъ векторовъ (т. е для соотвѣтствующихъ имъ частичныхъ силъ) полярный векторъ $YY > YY$, а для посолонныхъ векторовъ $YY < Y\overline{Y}$ [1]). Если мы построимъ параллелограммъ (§ 194) силъ, черезъ основные векторы YY и перпендикулярный къ нему основной векторъ $Z\overline{Z}$ [2]), то первая діагональ параллелограмма —OC— дастъ векторъ перпендикулярный къ (011). Въ такомъ случаѣ (рис. 57) для противусолонной разности (011) будетъ болѣе устойчива, чѣмъ $(01\overline{1})$, т. к. $YY > Y\overline{Y}$ (resp. $OY > O\overline{Y}$), а для посолонныхъ обратно. Мы имѣемъ здѣсь случай, наблюдаемый при кристаллизаціи винныхъ кислотъ (рис. 53); въ правой существуютъ $\{011\}$ и отсутствуютъ плоскости $\{0\overline{1}1\}$, — въ лѣвой винной кислотѣ—обратно. Очевидно, при всѣхъ построеніяхъ возможныхъ векторовъ съ помощью параллелограмма силъ для этихъ двухъ разностей, (строенія λ^2), будетъ наблюдаться бо́льшая вѣроятность появленія плоскостей для противусолонныхъ векторовъ въ октантахъ XYZ, чѣмъ въ октантахъ $X\overline{Y}Z$, т. к. изъ данныхъ слагающихъ $\overline{Y}Y > Y\overline{Y}$, а оси X и Z остаются одинаковыми. Надо замѣтить, что въ этомъ строеніи оба вектора по X и оба вектора по Z остаются одинаковыми, т.-е. $X\overline{X} = \overline{X}X$ и $Z\overline{Z} = \overline{Z}Z$, т. к. они перпендикулярны къ λ^2, т. е.

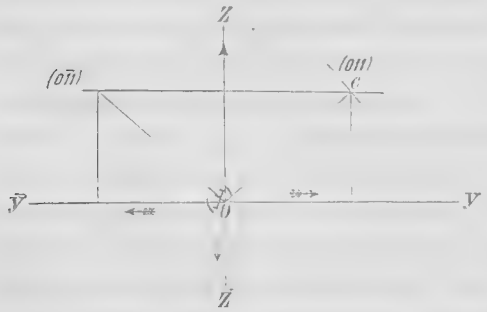


Рис. 57.

---

[1]) Такое предположеніе вытекаетъ изъ характера свѣтовыхъ свойствъ.

[2]) Перпендикулярность этихъ векторовъ всегда наблюдается въ моноклинической системѣ.

должны совпадать при поворотѣ на 180° (т. е. Z совпадаетъ съ Z и т. д.).

Такимъ образомъ, *различія въ значеніи векторовъ въ этомъ строеніи въ концѣ концовъ зависятъ только отъ свойствъ* λ^2. Плоскости, параллельныя $\lambda^2 = Y$ должны одинаково появляться какъ въ посолонныхъ, такъ и въ противусолонныхъ разностяхъ, такъ какъ перпендикулярные къ нимъ векторы по обоимъ направленіямъ линіи идентичны. Плоскости, перпендикулярныя къ другимъ векторамъ, не могутъ являться одинаково часто въ обѣихъ разностяхъ и для противусолонныхъ формы $\{hk0\}$, $\{hkl\}$, $\{0kl\}$, $\{\bar{h}kl\}$ и т. д. будутъ встрѣчаться чаще, чѣмъ $\{h\bar{k}0\}$, $\{k\bar{k}l\}$, $\{0\bar{k}l\}$ и $\{h\bar{k}l\}$, ибо перпендикулярные къ нимъ силовые векторы больше. Далеко не всѣ эти плоскости могутъ, однако, давать энантіоморфныя формы; это свойство зависитъ отъ симметріи, ибо, очевидно, плоскости энантіоморфныхъ формъ не должны быть параллельны или перпендикулярны къ λ^2 [1]). Слѣдовательно изъ всѣхъ такихъ формъ энантіоморфными будутъ только $\{hkl\}$ и $\{h\bar{k}l\}$ или $\{\bar{h}kl\}$ и $\{\bar{h}\bar{k}l\}$.

Такимъ образомъ разсмотрѣніе этого случая указываетъ, что, въ зависимости отъ характера векторовъ и ихъ положенія къ элементамъ симметріи, мы должны различать: 1) плоскости (resp. простыя формы) одинаково обычныя въ обѣихъ разностяхъ вещества, 2) плоскости (resp. простыя формы), болѣе обычныя для одной изъ разностей, но не энантіоморфныя и 3) плоскости (resp. простыя формы), болѣе обычныя для одной изъ разностей и энантіоморфныя.

Наблюденіе вполнѣ подтверждаетъ этотъ выводъ.

216. Тоже самое наблюдается и для болѣе сложныхъ случаевъ, напр. для наиболѣе сложнаго строенія — $3\lambda^4 4L^3 6L^2$ — *правильной системы.* Здѣсь оба направленія всѣхъ линій, совпадающихъ съ элементами симметріи, какъ легко сообразить, идентичны (λ^4, напр. ось Z, вызываетъ тождество оси $\bar{X}$ съ осью $\bar{Y}$, а оси X съ осью Y, этой же послѣдней съ осью X;—тоже существуетъ и для другихъ λ^4; затѣмъ $\lambda^4 = Z$ заставляетъ еще совпадать положительные и отрицательные отрѣзки λ^3 и т. д.).

Слѣдовательно, *только плоскости перпендикулярныя къ векто-*

---

[1]) Ибо двѣ энантіоморфныя *формы* не могутъ совпадать другъ съ другомъ (быть параллельными) путемъ вращенія.

рамъ, не совпадающимъ (и не перпендикулярнымъ) съ осями симметріи, могутъ давать формы различнаго значенія (обычности) для посолонной и противусолонной разностей вещества. Эти векторы однако не могутъ лежать въ зонахъ, проходящихъ черезъ двѣ какихъ-нибудь оси симметріи, ибо для всѣхъ такихъ плоскостей, какъ легко убѣдиться изъ распредѣленія элементовъ симметріи въ правильной системѣ (§ 108 сл.), положительные и отрицательные концы ихъ векторовъ будутъ идентичны, т. к. перпендикулярно къ плоскости проходящей черезъ два вектора всегда выходитъ λ^2. Остаются слѣдовательно только векторы, которые занимаютъ промежуточныя положенія. Это будутъ векторы, перпендикулярные къ $\{hkl\}$. Вслѣдствіе существованія $3\lambda^4$ всѣ явленія повторяются въ каждомъ октантѣ (§ 108). Внутри его выходитъ λ^3: слѣдовательно, три вектора одинаково расположенныхъ къ λ^3 всегда обладаютъ одинаковыми свойствами. Эти три вектора, очевидно, будутъ полярными векторами, и для нихъ плоскость можетъ появиться только съ одного конца. Возьмемъ октантъ XYZ посолоннаго вещества и представимъ себѣ, что въ немъ появился какой-нибудь векторъ A, (не совпадающій съ λ^3) (рис. 58). Положимъ для посолоннаго вещества направленіе OA будетъ выражать направленіе бо́льшей частичной силы, чѣмъ направленіе AO, — въ такомъ случаѣ для посолоннаго вещества плоскость, перпендикулярная къ концу A, будетъ имѣть гораздо болѣе шансовъ на существованіе, чѣмъ плоскость перпендикулярная къ концу A' той же линіи OA, выходящей въ октантѣ $\bar{X}Y\bar{Z}$. Тоже самое будетъ наблюдаться для всѣхъ векторовъ и въ каждомъ октантѣ получатся три участка, въ которыхъ будутъ выходить полюсы, аналогичные A (болѣе обычные для посолонныхъ формъ), и другіе, гдѣ выходятъ полюсы, аналогичные A' (болѣе обычныя для противусолонныхъ), ибо внутри октанта лежитъ λ^3 (§ 108), требующая 3-хъ векторовъ, идентичныхъ съ OA. Получатся единственные случаи энантіоморфныхъ формъ этого строенія — *тетартоэдры* (рис. 45).

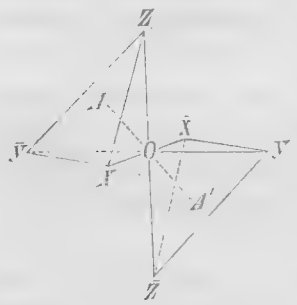


Рис. 58.

217. Ясно такимъ образомъ, что, примѣнивъ векторіальную гипотезу, вполнѣ возможно точно вывести тѣ плоскости (resp. простыя

формы), которыя будутъ: 1) одинаково возможны въ обѣихъ разностяхъ, 2) болѣе возможны въ одной изъ разностей, но не энантіоморфны и 3) болѣе возможны въ одной изъ разностей и энантіоморфны.

Такимъ образомъ изученіе структуры оптическихъ изомеровъ вмѣсто опроверженія закона Гаюи даетъ — при примѣненіи векторіальной гипотезы въ связи съ симметріей — его подтвержденіе. Мы видимъ въ этихъ явленіяхъ, т. е. въ зависимости простыхъ формъ отъ праваго или лѣваго характера изомера, не исключенія, а слѣдствія изъ закона Гаюи.

Я не буду здѣсь выводить эти формы для всѣхъ строеній — но такъ какъ, кажется, раньше такой выводъ не былъ сдѣланъ, и является здѣсь опубликованнымъ впервые, то я свожу простыя формы въ таблицѣ [1]) (см. стр. 226).

218. Гемиморфизмъ. Изъ характера векторовъ вытекаетъ еще одно важное измѣненіе закона Гаюи, которое легко получаетъ объясненіе, совершенно аналогичное энантіоморфнымъ структурамъ. Это явленіе т. наз. *гемиморфизма*. Давно замѣченное, оно долгое время являлось камнемъ преткновенія для кристаллографовъ и до сихъ поръ не можетъ считаться вполнѣ выясненнымъ. Слово гемиморфизмъ было употреблено впервые Брейтгауптомъ (1833) для обозначенія кристалловъ, въ которыхъ нѣкоторыя (иногда всѣ) оси симметріи или координатныя оси являются полярными векторами [2]). Но это названіе только констатировало давно наблюдавшіяся явленія, которыя были замѣчены еще въ XVIII столѣтіи, при изученіи формы турмалина (§ 13). При охлажденіи или нагрѣваніи такихъ гемиморфныхъ кристалловъ ($\lambda^3 3P$) оказалось, что одинъ конецъ (по отношенію къ $Z=\lambda^3$) кристалла наэлектризованъ положительно, а другой отрица-

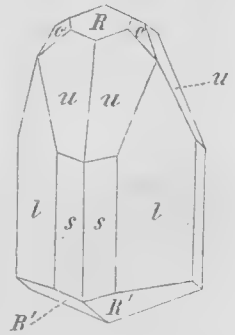


Рис. 59.

[1]) Триклиническая система (геміэдрія) не включена въ эту таблицу, т. к. благодаря отсутствію въ ней элементовъ симметріи, нельзя въ ней усмотрѣть никакой правильности.

[2]) Очевидно я перевожу языкъ Брейтгаупта на тѣ выраженія, какія употребляются въ этомъ сочиненіи.

	Строенія.	Формы общія обѣимъ разностямъ.	Не энантіоморфныя. Противусолонныя формы.	Не энантіоморфныя. Посолонныя формы.	Энантіоморфныя. Противусолонныя формы.	Энантіоморфныя. Посолонныя формы.
		I. Моноклиническая система.				
1	λ^2	$\{h0l\}$. $\{h0l\}$, $\{001\}$ $\{100\}$	$\{010\}$	$\{0\bar{1}0\}$	$\{0kl\}$, $\{hk0\}$ $\{hkl\}$, $\{\bar{h}kl\}$	$\{\bar{h}kl\}$, $\{h\bar{k}l\}$ $\{0\bar{k}l\}$, $\{h\bar{l}0\}$
		II. Ромбическая система.				
2)	$3\lambda^2$	$\{001\}$, $\{010\}$, $\{100\}$ $\{h0l\}$, $\{0kl\}$, $\{hk0\}$	—	—	$\{hkl\}$	$\{h\bar{k}l\}$
		III. Квадратная система.				
3)	λ^4	$\{hk0\}$, $\{100\}$, $\{110\}$	$\{001\}$	$\{00\bar{1}\}$	$\{11l\}$, $\{hkl\}$ $\{10l\}$	$\{11l\}$, $\{hk\bar{l}\}$, $\{10\bar{l}\}$
4)	$\lambda^4 4L^2$	$\{hk0\}$, $\{100\}$, $\{110\}$ $\{001\}$, $\{11l\}$, $\{10l\}$	—	—	$\{hkl\}$	$\{khl\}$
		IV. Гексагональная система.				
5)	$\lambda^6 6L^2$	$\{0001\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$ $\{11\bar{2}l\}$. $\{10\bar{1}l\}$, $\{hk\bar{i}0\}$	—	—	$\{hi\bar{k}l\}$	$\{ih\bar{k}l\}$
6)	λ^6	$\{1010\}$, $\{11\bar{2}0\}$	$\{0001\}$, $\{hk\bar{i}0\}$	$\{000\bar{1}\}$, $\{h\bar{i}k0\}$	$\{10\bar{1}l\}$, $\{hk\bar{i}l\}$ $\{11\bar{2}l\}$, $\{h\bar{i}kl\}$	$\{110\bar{l}\}$, $\{hk\bar{i}\bar{l}\}$ $\{112l\}$, $\{h\bar{i}kl\}$
7)	$\lambda^3 3L^2$	$\{10\bar{1}0\}$. $\{0001\}$, $\{10\bar{1}l\}$	$\{2\bar{1}\bar{1}l\}$ $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$, $\{h\bar{i}\bar{k}0\}$	$\{11\bar{2}l\}$ $\{11\bar{2}0\}$ $\{hk\bar{i}0\}$	$\{h\bar{i}\bar{k}l\}$. $\{\bar{i}k\bar{h}l\}$	$\{h\bar{k}il\}$. $\{k\bar{i}hl\}$
8)	λ^3	. .	$\{0001\}$, $\{2\bar{1}10\}$ $\{h\bar{k}i0\}$, $\{10\bar{1}0\}$	$\{000\bar{1}\}$, $\{1120\}$ $\{h\bar{k}i0\}$, $\{1\bar{1}00\}$	$\{211l\}$, $\{101l\}$ $\{h\bar{i}kl\}$, $\{11\bar{2}l\}$ $\{1\bar{1}0l\}$, $\{hk\bar{i}l\}$	$\{11\bar{2}l\}$, $\{1\bar{1}0l\}$. $\{h\bar{k}il\}$, $\{211l\}$. $\{10\bar{1}l\}$. $\{hikl\}$
		V. Правильная система.				
9)	$3\lambda^2 4L^3$	$\{100\}$. $\{110\}$	$\{111\}$. $\{11l\}$. $\{ll1\}$. $\{hk0\}$	$\{111\}$, $\{1\bar{1}l\}$ $\{l\bar{l}1\}$. $\{kh0\}$	$\{hkl\}$, $\{k\bar{h}l\}$	$\{hhl\}$, $\{h\bar{k}l\}$
10)	$3\lambda^4 4L^3 6L^2$	$\{100\}$, $\{111\}$, $\{110\}$, $\{hk0\}$. $\{hhl\}$. $\{hhl\}$	—	—	$\{hkl\}$	$\{khl\}$

тельно. На обоихъ электрически различныхъ концахъ кристалла (его полюсахъ) развиты разныя простыя формы (рис. 59, турмалинъ изъ Арендала [1]). Очень легко можно убѣдиться, что характеристики простыхъ формъ на разныхъ концахъ кристалла

---

[1]) Въ немъ $R=\{10\bar{1}1\}$, $R'=\{01\bar{1}1\}$, $o=\{02\bar{2}1\}$, $s=\{11\bar{2}0\}$, $l=\{10\bar{1}0\}$, $a=\{32\bar{5}1\}$ при $a:c=1:0.4480$ (по Ерофѣеву).

тѣсно связаны съ отношеніемъ этихъ концовъ къ электрическимъ явленіямъ; онѣ остаются неизмѣнными для всѣхъ кристалловъ даннаго вещества. Поэтому удобно, какъ это было сдѣлано впервые Розе и Риссомъ (1843), называть одинъ конецъ поліэдра, который электризуется при охлажденіи положительно (а при нагрѣваніи— отрицательно) *аналогичнымъ полюсомъ* (знакомъ +) кристалла, а противоположный его конецъ *антилогичнымъ полюсомъ* (знакомъ —). Очень удобно употреблять эти названія для разныхъ концовъ полярныхъ векторовъ (§ 205), но при этомъ, конечно, надо имѣть въ виду, что иногда по направленію къ аналогичному концу вектора наблюдается для данной линіи наибольшая величина частичныхъ силъ (для простыхъ формъ аналогичнаго полюса), иногда обратно.

219. Очень скоро тѣ же явленія были обнаружены и для разныхъ другихъ веществъ—иногда очень рѣзко и ярко, какъ въ примѣрѣ турмалина, иногда же мало замѣтно, въ тѣлахъ правильной системы и въ нѣкоторыхъ строеніяхъ гексагональной. Подобно тому, какъ это наблюдается для геміэдріи (§ 127, 202) и здѣсь развивается *половина* плоскостей голоэдрической формы (напр., для {0001} турмалина вмѣсто двухъ плоскостей голоэдрическаго пинакоида развивается только одна плоскость). Исходя изъ этого наблюденія (§ 202) уже Мосъ и его ближайшіе ученики, гл. образомъ Науманнъ, пытались открыть какую-нибудь законность въ исчезновеніи тѣхъ или иныхъ плоскостей;—но эти теоретическія попытки къ 1860—1870 годамъ ясно привели къ совершенно ненаблюдаемымъ въ природѣ многогранникамъ. Въ концѣ концовъ онѣ вызвали у многихъ натуралистовъ мнѣніе, что нѣтъ явленія, называемаго гемиморфизмомъ, и что наблюдаемое недоразвитіе плоскостей является результатомъ химической структуры или случайностей роста кристалловъ.

Между тѣмъ уже въ 1830 году Гессель, исходя изъ законовъ симметріи, далъ полное и правильное рѣшеніе вопроса и вывелъ всѣ гемиморфныя формы; тотъ же выводъ въ 1840 и 1860 годахъ былъ сдѣланъ независимо Бравэ и Гадолинымъ и наконецъ въ 1870—1880 годахъ проникъ въ общее сознаніе кристаллографовъ.

Къ этому времени стало совершенно несомнѣннымъ, что вещества гемиморфныя въ томъ смыслѣ, какъ это понятіе было употреблено Брейтгауптомъ, могутъ встрѣчаться только въ нѣкоторыхъ опредѣлен-

ныхъ кристаллическихъ строеніяхъ, въ тѣсной зависимости отъ ихъ элементовъ симметріи.

Гемиморфные кристаллическіе многогранники всегда обладаютъ полярными векторами (§ 205), слѣдовательно они *могутъ встрѣчаться только въ такихъ кристаллическихъ строеніяхъ, въ которыхъ нѣтъ центра симметріи.* Существованіе въ тѣлѣ центра симметріи (т.-е. $\infty Л^2$) вызываетъ тождественность двухъ разныхъ направленій одной и той же линіи, т.-е. отсутствіе въ тѣлѣ полярныхъ векторовъ.

Однако, мы видѣли, что сюда же принадлежатъ энантіоморфные поліэдры (§ 199). Эти поліэдры, хотя и обладаютъ полярными векторами, но въ тоже время проявляютъ особыя свойства въ связи съ посолоннымъ и противусолоннымъ ихъ характеромъ (§ 207). Конечно, полярный характеръ векторовъ въ нихъ не теряется, и кристаллы этихъ веществъ обладаютъ аналогичнымъ и антилогичнымъ полюсами. Но эти вещества, какъ мы видѣли, обладаютъ совершенно особыми свойствами по отношенію къ закону Гаюи, свойствами, заставляющими отдѣлять ихъ въ особую группу. Въ нихъ однѣ и тѣ же формы могутъ встрѣчаться въ аналогичномъ и антилогичномъ полюсахъ— однѣ въ лѣвыхъ, другія въ правыхъ кристаллахъ, ибо формы, обычныя для правыхъ кристалловъ, рѣдки для лѣвыхъ (§ 213) и обратно.

Совершенно иное отношеніе къ закону Гаюи кристалловъ остальныхъ 9 строеній безъ центра симметріи, но обладающихъ другими элементами сложной симметріи (т.-е. P и $Л^4$). Только въ нихъ наблюдается связь простыхъ формъ съ электрическими полюсами для всѣхъ кристалловъ химическаго соединенія и только къ нимъ подойдетъ старинное понятіе о гемиморфизмѣ (§ 218).

Такимъ образомъ *явленіями гемиморфизма мы будемъ называть законности въ развитіи простыхъ формъ въ кристаллическихъ строеніяхъ, не обладающихъ центромъ симметріи, но обладающихъ другими какими нибудь элементами сложной симметріи, законности, зависящія исключительно отъ полярныхъ векторовъ.*

222. Явленіе, которое здѣсь наблюдается заключается въ томъ, что нѣкоторыя — строго опредѣленныя— простыя формы простыхъ характеристикъ *не встрѣчаются или чрезвычайно рѣдко встрѣчаются* въ кристаллахъ даннаго химическаго соединенія. Гемиморфное строеніе какъ бы соотвѣтствуетъ въ этомъ отношеніи одной изъ оптическихъ разностей энантіоморфнаго вещества. Въ какомъ-нибудь

химическомъ соединеніи, способномъ давать энантіоморфныя разности, въ одной изъ нихъ встрѣчаются однѣ простыя формы (§ 213), а въ другой другія аналогичнаго индекса — но для всего вещества могутъ встрѣчаться обѣ возможныя простыя формы. Между тѣмъ въ гемиморфныхъ веществахъ, одна изъ возможныхъ разностей, связанныхъ съ опредѣленнымъ полярнымъ векторомъ *совсѣмъ или почти совсѣмъ отсутствуетъ* въ химическомъ соединеніи. Это явленіе имѣетъ довольно крупный теоретическій интересъ для познанія вещества — но пока оставимъ въ сторонѣ его значеніе для теоріи матеріи. Обратимъ лишь вниманіе на связь его съ закономъ Гаюи. Наблюдаются напримѣръ слѣдующія явленія. Мы знаемъ, что *тетраэдръ* (§ 180, рис. 24) строенія $3\lambda^2\ 4L^3\ 6P$ можетъ имѣть знакъ $\{111\}$ или $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$. Для строенія $3\lambda^2\ 4L^3$ существуютъ оба этихъ тетраэдра, причемъ $\{111\}$ будетъ встрѣчаться гл. обр. на правыхъ кристаллахъ, а $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ въ нихъ будетъ отсутствовать и наблюдаться только на лѣвыхъ (см. таблицу § 217). Но если мы возьмемъ всѣ кристаллы (правые и лѣвые) какого-нибудь химическаго соединенія $3\lambda^2\ 4L^3$, мы найдемъ въ нихъ обѣ формы и $\{111\}$ и $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$. Совершенно другое явленіе будетъ наблюдаться для $\{111\}$ и $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ строенія $3\lambda^2\ 4L^3\ 6P$. Здѣсь для *даннаго химическаго соединенія* будетъ господствовать или преобладать *одинъ* какой нибудь тетраэдръ—$\{111\}$ *или* $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$. Такъ, напр. по наблюденіямъ Задебека (1872) и другихъ въ кристаллахъ *тетраэдрита* (блеклой руды), $\{111\}$ встрѣчается очень часто, нерѣдко господствуетъ, тогда какъ $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ никогда не является господствующей формой, наблюдается только въ комбинаціяхъ, чаще въ видѣ мелкихъ площадокъ. Въ кристаллахъ *цинковой обманки*, $\{111\}$ является часто въ видѣ блестящихъ, хорошо образованныхъ граней, тогда какъ $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ въ этомъ веществѣ наблюдается много рѣже и почти всегда въ видѣ закругленныхъ, неправильныхъ граней (Задебекъ 1869—1878, Беккэ 1883). Еще рѣзче видно это для другихъ простыхъ формъ того же минерала, какъ показали наблюденія Беккэ: встрѣчаются $\{5\bar{5}4\}$, $\{5\bar{5}3\}$, $\{2\bar{2}1\}$, $\{3\bar{2}1\}$ и т. д., тогда какъ $\{554\}$, $\{553\}$, $\{221\}$, $\{321\}$ совсѣмъ не наблюдаются. Въ октантахъ XYZ и другихъ, соотвѣтствующихъ формѣ $\{111\}$, господствуютъ въ свою очередь плоскости иныхъ формъ, напр. $\{311\}$ гораздо чаще наблюдается, чѣмъ $\{3\bar{1}1\}$. Тоже различіе $\{111\}$ или $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ наблюдается еще для борацита, гельвина, эвлитина и т. д.

Можно высказать, какъ общее правило, что для такихъ гемиморфныхъ строеній появляется въ соединеніи или одинъ какой-нибудь тетраэдръ или, если появляются оба, то въ совершенно различномъ развитіи, съ рѣзко выраженной неравнозначностію плоскостей. Слѣдовательно, въ строеніи тѣла существуютъ условія, которыя дѣлаютъ {111} и {111} неравнозначными, и эти условія, зависящія отъ свойствъ векторовъ, вносятъ для этихъ строеній поправку въ законъ Гаюи. Совершенно тоже наблюдается всегда и для другихъ простыхъ формъ того же строенія, такъ для алюмощавелевокислаго калія-натрія $Na_2\ K\ Al\ (C_2O_4)_3.\ 4H_2O$ — {211} встрѣчается въ видѣ рѣзко выраженныхъ плоскостей, а $\{2\bar{1}1\}$ всегда въ видѣ мелкихъ, плохо выраженныхъ площадокъ (Беккенкампъ); въ борацитѣ $\{2\bar{1}1\}$ встрѣчается довольно часто, а {211} неизвѣстенъ, въ эвлитинѣ и гельвинѣ находится только {211} и т. д.

223. Во всѣхъ этихъ случаяхъ изъ плоскостей съ одинаковыми характеристиками только нѣкоторыя свойственны данному веществу, тогда какъ другія являются рѣдкими или вовсе отсутствуютъ. Это явленіе встрѣчается всюду во всѣхъ тѣхъ строеніяхъ безъ центра симметріи, которыя обладаютъ элементами сложной симметріи. Оно выражено особенно рѣзко въ такихъ веществахъ, которыя кристаллизуются въ строеніяхъ, гдѣ есть одно особенное направленіе (напр., гексагональная и квадратная системы). Таковъ, напр., турмалинъ ($\lambda^3\ 3P$), (§ 218), свойства кристалловъ котораго въ этомъ отношеніи были недавно изучены В. И. Воробьевымъ (1900). Изъ наблюденій Воробьева надъ тысячами кристалловъ турмалина изъ Цейлона, образованныхъ со всѣхъ сторонъ, вытекаетъ, напр., что r $\{01\bar{1}1\}$ встрѣчается очень часто, а {1011} *никогда* не наблюдается, δ $\{10\bar{1}2\}$ i $\{20\bar{2}1\}$, $\{01\bar{1}3\}$, $\{20\bar{2}3\}$, $\{12\bar{3}1\}$ и т. д. находятся только на антилогичномъ полюсѣ, а соотвѣтствующія имъ нижнія формы $\{\bar{1}10\bar{2}\}$, {2201}, $\{10\bar{1}3\}$ и т. д. совершенно отсутствуютъ въ данномъ тѣлѣ. Въ то же самое время другія формы съ простыми характеристиками встрѣчаются только на аналогичномъ полюсѣ, какъ, напр., $\{\bar{1}\bar{1}23\}$ и т. д. А между тѣмъ на этихъ кристаллахъ наблюдалось 165 простыхъ формъ (731 плоскость), нерѣдко съ очень сложными характеристиками. Изученіе турмалина другихъ мѣсторожденій вполнѣ подтверждаетъ этотъ выводъ.

224. Изъ этихъ наблюденій, которыя легко можно было бы уве-

личить и которыя служатъ только примѣрами, несомнѣнно слѣдуетъ, что въ структурѣ этихъ веществъ находятся условія, которыя вносятъ поправку въ законъ Гаюи и вызываютъ различныя свойства векторовъ, соотвѣтствующихъ плоскостямъ съ одинаковыми числовыми характеристиками. Эти условія заключаются въ полярности векторовъ и могутъ быть вполнѣ объяснены, если допустить (ср. § 214), что оба полярныхъ вектора одной и той же линіи, соотвѣтствующія направленнымъ по нимъ молекулярнымъ силамъ, *различны по величинѣ*. Очевидно, въ такомъ случаѣ и ихъ слагающія будутъ различны, а слѣдовательно и перпендикулярныя къ послѣднимъ плоскости—хотя бы равныхъ числовыхъ характеристикъ—не всегда будутъ одинаково обычны. На аналогичномъ и антилогичномъ концахъ вектора могутъ быть обычными формы разныхъ характеристикъ, ибо законы измѣненія молекулярныхъ силъ въ этихъ обоихъ направленіяхъ не будутъ одинаковы.

225. Въ самомъ дѣлѣ пусть AB (рис. 60) будетъ полярный векторъ, т.-е. AB не равна BA и положимъ направленіе AB будетъ направленіемъ наибольшей векторіальной силы—въ такомъ случаѣ перпендикулярно къ нему (§ 197) можетъ при образованіи кристаллическаго многогранника появляться кристаллическая плоскость. Эта плоскость появится на концѣ B, но параллельная ей грань можетъ не появиться на концѣ A, если BA есть направленіе молекулярной силы меньшей, чѣмъ AB и если въ то же время въ тѣлѣ существуютъ другія направленія силъ, большихъ, чѣмъ BA: плоскости появятся тогда перпендикулярно этимъ другимъ бо́льшимъ векторамъ. Положимъ, таковы будутъ полярные векторы CD и EF (при чемъ имъ соотвѣтствующіе векторы DC и FE будутъ направленіями меньшихъ молекулярныхъ силъ) и эти три вектора AB, CD и EF будутъ *основными векторами* (§ 194); получатся плоскости на ихъ концахъ B, D и F: тогда какъ плоскости на концахъ A, C и E могутъ не появляться, если всѣ векторы BA, DC и FE будутъ

Рис. 60.

направленіями меньшихъ молекулярныхъ силъ, чѣмъ три исходные основные. По теоріи Грассманна каждая новая плоскость будетъ появляться перпендикулярно къ производнымъ трехъ основныхъ векторовъ—при чемъ плоскости будутъ наиболѣе обычны перпендикулярно къ первымъ производнымъ, т. е. раньше всего, напр., въ октантѣ XYZ—если взять основные силовые векторы за координатныя оси—должны появиться плоскости (111), (101), (011) и (110) [1] (§ 196). Эти плоскости, само собою разумѣется, могутъ быть болѣе обычны, чѣмъ отсутствующія плоскости $(00\bar{1})$, $(\bar{1}00)$ и $(0\bar{1}0)$, если только различіе въ величинѣ полярныхъ силовыхъ векторовъ $X\bar{X}$, $Y\bar{Y}$ и $Z\bar{Z}$ сравнительно съ $\bar{X}X$, $\bar{Y}Y$ и $\bar{Z}Z$ таково, что производные силовые векторы отъ $X\bar{X}$, $Y\bar{Y}$ и $Z\bar{Z}$ *больше*, чѣмъ сами $\bar{X}X$, $\bar{Y}Y$ и $\bar{Z}Z$. Явленія симметріи нисколько не противорѣчатъ такому допущенію и соотвѣтственно въ нѣкоторыхъ октантахъ или частяхъ кристалла могутъ раньше являться плоскости съ болѣе сложными индексами, чѣмъ плоскости съ болѣе простыми характеристиками въ другихъ октантахъ или частяхъ того же кристалла. Само собою разумѣется при полученіи производныхъ отъ разныхъ полярныхъ векторовъ здѣсь могутъ встрѣчаться разнообразные случаи, которые значительно варіируютъ отъ вещества къ веществу.

Въ то же самое время *наблюденіе* такихъ гемиморфныхъ формъ, какъ въ приведенныхъ примѣрахъ турмалина, тетраэдрита и т. д. показываетъ, что дѣйствительно строеніе вещества таково, что разные полярные векторы одной и той же линіи очень различны по величинѣ и характеру направленныхъ по нимъ молекулярныхъ силъ.

226. Въ результатѣ подобныхъ комбинацій образуются многогранники, на разныхъ концахъ нѣкоторыхъ линій которыхъ развиты различныя плоскости (resp. простыя формы). Наиболѣе рѣзко видно это различіе въ томъ случаѣ, когда такая линія совпадаетъ съ какой нибудь опредѣленной осью кристалла, напр. съ осью Z $(=\lambda^3)$ въ кристаллѣ турмалина (рис. 59). Такіе многогранники называются

---

[1]) Аналогичное явленіе Федоровъ (1901) прекрасно выразилъ словомъ періодъ. Это будутъ плоскости перваго періода. Детальная теоретическая разработка этого вопроса лежитъ въ сторонѣ отъ задачъ этого сочиненія.

гемиморфными многогранниками, а линіи, на которыхъ развиваются разныя простыя формы, *гемиморфными осями*.

Гемиморфные многогранники не всегда принадлежатъ къ энантіоморфнымъ комбинаціямъ. Энантіоморфные же многогранники наоборотъ всегда могутъ быть гемиморфны, ибо въ нихъ никогда нѣтъ центра симметріи; такъ, напр., комбинаціи (рис. 53) винныхъ кислотъ не только энантіоморфны, но и гемиморфны, при чемъ λ^2 является гемиморфною осью.

Это явленіе необходимо принимать во вниманіе, ибо въ нѣкоторыхъ физическихъ явленіяхъ — гл. обр. въ электрическихъ — такіе многогранники пріобрѣтаютъ новыя свойства и ихъ гемиморфныя оси имѣютъ большое физическое значеніе. На концахъ этихъ осей развивается электричество разнаго знака (§ 218); ихъ концы являются какъ бы электрическими полюсами.

227. Поэтому, имѣетъ значеніе опредѣленіе положенія гемиморфныхъ осей въ кристаллѣ. Очевидно, это будутъ тѣ векторы, которые могутъ обладать полярнымъ характеромъ (§ 205). Такой полярный характеръ вектора, понятно, зависитъ отъ симметріи, такъ, напр., въ строеніи λ^2 (моноклинической системы) векторъ, параллельный λ^2 будетъ полярнымъ (т. е. можетъ быть въ многогранникѣ гемиморфной осью), а перпендикулярный къ нему векторъ не можетъ быть полярнымъ (т. е. не можетъ быть въ многогранникѣ гемиморфной осью), ибо при поворотѣ на 180° вокругъ λ^2 оба его конца должны совпасть, т. е. быть идентичны (ср. § 208).

Разсуждая такимъ образомъ можно вывести гемиморфныя оси для всѣхъ кристаллическихъ строеній, обладающихъ гемиморфизмомъ. Въ нижеслѣдующей таблицѣ сдѣлана такая попытка, при чемъ направленія гемиморфныхъ осей выражены въ такой сводкѣ въ индексахъ тѣхъ простыхъ формахъ, перпендикулярно къ плоскостямъ которыхъ онѣ выходятъ. Такія простыя формы можно называть *гемиморфными формами*. Гемиморфныя строенія наблюдаются только въ 5 системахъ, въ триклинической ихъ нѣтъ, такъ какъ ея геміэдрія принадлежитъ къ энантіоморфнымъ структурамъ (§ 217), а въ голоэдріи есть *c*.

228. Мы имѣемъ слѣдующія гемиморфныя формы:

Строеніе.	Гемиморфныя формы:
	I. Моноклиническая система.
1) π	Всѣ, кромѣ $\{010\}$[1].
	II. Ромбическая система.
2) $\lambda^2\ 2P$	$\{001\}$, $\{00\bar{1}\}$, $\{0kl\}$, $\{0k\bar{l}\}$, $\{h0l\}$, $\{h0\bar{l}\}$, $\{hkl\}$, $\{hk\bar{l}\}$.
	III. Квадратная система.
3) $\lambda^4\ 4P$	$\{001\}$, $\{00\bar{1}\}$, $\{hhl\}$, $\{h\bar{h}l\}$, $\{0kl\}$, $\{0k\bar{l}\}$, $\{hkl\}$, $\{h\bar{k}l\}$.
4) $\lambda^2\ 2L^2\ 2P'$	$\{hhl\}$, $\{h\bar{h}l\}$, $\{hkl\}$, $\{h\bar{k}l\}$.
	IV. Гексагональная система.
5) $\lambda^3\ 3L^2\ \pi\ 3P'$	$\{11\bar{2}0\}$, $\{\bar{2}110\}$, $\{11\bar{2}l\}$, $\{\bar{2}11l\}$[2].
6) $\lambda^6\ 6P$	$\{0001\}$, $\{000\bar{1}\}$, $\{11\bar{2}l\}$, $\{11\bar{2}\bar{l}\}$, $\{10\bar{1}l\}$, $\{10\bar{1}\bar{l}\}$, $\{hi\bar{k}l\}$, $\{h\bar{i}\bar{k}l\}$.
7) $\lambda^3\ \pi$	$\{10\bar{1}0\}$, $\{1\bar{1}00\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$, $\{hi\bar{k}0\}$, $\{h\bar{i}\bar{k}0\}$.
8) $\lambda^3\ 3P$	$\{0001\}$, $\{000\bar{1}\}$, $\{10\bar{1}l\}$, $\{1\bar{1}0l\}$, $\{10\bar{1}\bar{l}\}$, $\{1\bar{1}0\bar{l}\}$, $\{11\bar{2}l\}$, $\{11\bar{2}\bar{l}\}$, $\{hi\bar{k}l\}$, $\{h\bar{i}\bar{k}l\}$, $\{hi\bar{k}\bar{l}\}$, $\{hk\bar{i}l\}$.
	V. Правильная система.
9) $3\lambda^2\ 4L^3\ 6P'$	$\{111\}$, $\{1\bar{1}1\}$, $\{hhl\}$, $\{h\bar{h}l\}$, $\{hkl\}$, $\{h\bar{k}l\}$, $\{lh\}$, $\{l\bar{h}\}$.

229. Основы проекцій кристаллическихъ многогранниковъ. До сихъ поръ мы не пользовались однимъ изъ неизбѣжныхъ и чрезвычайно удобныхъ пріемовъ геометрическаго изученія явленій—перенесенію ихъ на плоскость — геометрическими свойствами проекцій. Этотъ пріемъ въ связи съ аналитическимъ выраженіемъ кристаллическихъ

---

[1]) Это строеніе обладаетъ наиболѣе рѣзко выраженнымъ полярнымъ характеромъ векторовъ.

[2]) Это строеніе должно обладать наиболѣе простыми и любопытными свойствами полярныхъ явленій, такъ какъ полярные векторы расположены въ шести зонахъ. Къ сожалѣнію, вещества этого строенія до сихъ поръ неполучены.

плоскостей и формъ съ помощью индексовъ оказалъ чрезвычайное вліяніе на все развитіе геометрической кристаллографіи. Хотя по плану этого сочиненія изложеніе всѣхъ *пріемовъ* вычисленія отнесено въ конецъ труда — но, въ виду неизбѣжности пользоваться пріемами и выраженіями, связанными съ проекціями въ дальнѣйшихъ главахъ книги, необходимо здѣсь же изложить главнѣйшія основанія проекцій и основныя теоремы, связанныя съ проекціоннымъ черченіемъ. Всѣ вопросы, связанные со *способами* вычерчиванія проекцій кристаллическихъ многогранниковъ и съ практическими методами болѣе простого и быстраго ихъ воспроизведенія будутъ отнесены въ одну изъ дальнѣйшихъ главъ сочиненія, въ которой будутъ кратко изложены наиболѣе простые способы кристаллографическихъ вычисленій.

230. Уже въ 1804 г. Бернгарди опредѣленно и ясно высказалъ основные принципы *сферической стереографической проекціи* кристалловъ, но проведена эта мысль была впервые въ 1823 году Ф. Нейманномъ (§ 32). Довольно долго она мало обращала на себя вниманія, пока въ концѣ слѣдующаго десятилѣтія ее не развилъ дальше и не связалъ съ ней всѣ вычисленія кристалловъ Миллеръ въ Кембриджѣ. Однако на континентъ она стала проникать лишь постепенно и окончательно вошла въ общее употребленіе не раньше конца 1870—1880 годовъ.

Въ 1834 году Квенштедтъ предложилъ другой способъ кристаллографическихъ проекцій—т. наз. *гномоническую проекцію*. Эта проекція имѣетъ несомнѣнно извѣстное значеніе и преимущество для рѣшенія нѣкоторыхъ частныхъ вопросовъ. Она была впервые предложена Квенштедтомъ, когда онъ былъ еще студентомъ и слушалъ лекціи Вейса и Вейсъ сразу сталъ ее употреблять въ своихъ работахъ (1834). Въ 1835 г. Квенштедтъ опубликовалъ этотъ методъ проекціи и онъ быстро вошелъ въ употребленіе.

Съ тѣхъ поръ было предложено много разнообразныхъ способовъ проекціи, которымъ ихъ авторы придавали извѣстныя названія. Проекція многогранника на плоскость есть частный случай общаго геометрическаго вопроса о выраженіи пространственныхъ формъ на плоскости и очевидно этотъ вопросъ имѣетъ безконечно большое количество различныхъ рѣшеній. Можно нанести данный предметъ на плоскость безчисленнымъ множествомъ путей и всѣ эти способы могутъ быть изучены—и были изучены — съ геометрической точки зрѣнія и сведены на немногія различныя группы.

Но проекція въ кристаллографіи имѣетъ чисто прикладное значеніе; для насъ важно только выбрать изъ числа множества возможныхъ такую или такія проекціи, которыя выражали бы возможно просто, точно и ясно основныя геометрическія свойства кристалловъ — т. е. явленія симметріи, зоны, простыя формы, индексы—и въ то же время позволяли бы также просто читать и вычислять эти основныя геометрическія явленія на проекціонномъ чертежѣ.

Это вполнѣ точно и удобно можно сдѣлать, пользуясь сферической и гномонической проекціями. Всѣ другіе предложенные способы не дали никакихъ преимуществъ или упрощеній по сравненію съ этими наиболѣе употребительными пріемами и потому я оставлю ихъ совершенно въ сторонѣ, безъ разсмотрѣнія.

Изъ этихъ двухъ пріемовъ наибольшее значеніе имѣетъ *сферическая проекція*, на разсмотрѣніи свойствъ которой я главнымъ образомъ здѣсь и остановлюсь.

231. Для проектированія кристаллическаго многогранника мы будемъ его замѣнять—какъ дѣлали и раньше (§§ 149, 189)—пучкомъ исходящихъ изъ его центра векторовъ, перпендикулярныхъ къ его плоскостямъ. Произвольнымъ радіусомъ опишемъ шаръ вокругъ центра такого многогранника; въ такомъ случаѣ выходящіе изъ его центра, перпендикулярные къ кристаллическимъ гранямъ, векторы дойдутъ до поверхности шара и пересѣкутъ его въ нѣкоторыхъ точкахъ. Эти точки мы будемъ называть *полюсами кристаллическихъ плоскостей*. Очевидно каждый полюсъ всегда отвѣчаетъ только одной опредѣленной грани кристаллическаго поліэдра.

Такой шаръ съ разсѣянными на немъ точками можетъ вполнѣ замѣнить кристаллическій многогранникъ, ибо основнымъ, неизмѣннымъ элементомъ такого многогранника являются только гранные углы (§ 148), т. е. углы между векторами, перпендикулярными къ его гранямъ. Эти же углы, какъ само собою разумѣется, равны дугамъ, проведеннымъ между соотвѣтственными полюсами плоскостей на поверхности даннаго шара. Распредѣленіе полюсовъ (т. е. точекъ) на шарѣ будетъ вполнѣ соотвѣтствовать распредѣленію плоскостей въ пространствѣ; каждая плоскость замѣняется одной точкой — однимъ полюсомъ. Разные многогранники будутъ соотвѣтствовать шарамъ съ разнымъ распредѣленіемъ точекъ на ихъ поверхности и въ то же время всѣ такіе шары вполнѣ сохранятъ неизмѣннымъ

основное свойство кристаллическихъ многогранниковъ,—постоянство ихъ гранныхъ угловъ.

232. Такое сведеніе всѣхъ разнообразныхъ кристаллическихъ многогранниковъ къ одной и той же геометрической фигурѣ — къ шару—чрезвычайно упрощаетъ пріемы проекцій. Задача остановится ясной и простой. Надо только умѣть переносить на плоскость шаръ съ нанесенными на немъ полюсами, притомъ такъ, чтобы можно было измѣрять разстояніе между полюсами. Но, сверхъ того изъ числа множества различныхъ проекцій надо выбрать такія, которыя выражали бы ясно и удобно еще нѣкоторыя другія свойства кристаллическаго многогранника.

Изъ такихъ свойствъ въ проэкціонномъ изображеніи кристалла пріобрѣтаетъ наибольшее значеніе явленіе зонарнаго расположенія его плоскостей (§ 163 сл.). Какъ выразятся на шарѣ полюсы плоскостей, принадлежащихъ къ одной и той же зонѣ? Очевидно эти полюсы будутъ всѣ лежать на одномъ и томъ же кругѣ, проходящемъ чрезъ центръ кристалла, ибо всѣ векторы плоскостей, принадлежащихъ къ одной зонѣ лежатъ въ одной плоскости, слѣдовательно, въ одной плоскости будутъ лежать и концы такихъ векторовъ (полюсы), а пересѣкающая шаръ плоскость — въ которой лежатъ эти исходящіе изъ центра векторы — будетъ имѣть форму круга, проходящаго черезъ центръ шара.

Такой кругъ сѣченія, проходящій черезъ центръ шара, мы будемъ называть *большимъ кругомъ*. Слѣдовательно *полюсы тавтозональныхъ (§ 163) плоскостей всегда лежатъ на окружности большого круга*. Отсюда мы спокойно можемъ сдѣлать обратное заключеніе: всякій большой кругъ на шарѣ проходитъ всегда черезъ полюсы плоскостей, принадлежащихъ къ одной и той же зонѣ. Стоитъ намъ только провести большіе круги на шарѣ, захватить ими всѣ полюсы—для того чтобы бы захватить въ зоны всѣ плоскости кристалла.

Мы знаемъ, что всякое сѣченіе шара есть кругъ, поэтому и сѣченіе шара плоскостію, не проходящею черезъ его центръ будетъ также кругомъ—но эти круги дадутъ окружности меньшія, чѣмъ тѣ сѣченія, которыя проходятъ черезъ центръ шара. Мы будемъ ихъ называть *малыми кругами* шара. Полюсы, лежащіе на этихъ малыхъ кругахъ не принадлежатъ къ одной и той же зонѣ; слѣдовательно ихъ взаимное расположеніе не является такимъ характернымъ и

важнымъ признакомъ кристаллическаго многогранника, какимъ неизбѣжно (§ 168, 175) является зонарное распредѣленіе плоскостей, тѣсно связанное съ основнымъ закономъ кристаллическихъ тѣлъ, съ закономъ Гаюи. Однако, и эти круги имѣютъ значеніе для рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ, связанныхъ съ вычисленіемъ кристалловъ.

233. Сферическая (иначе стереографическая) проекція нерѣдко употребляется для черченія географическихъ картъ и потому ея основанія намъ обычны. Въ кристаллахъ плоскостью проекціи служитъ одинъ изъ большихъ круговъ, при чемъ въ кристаллахъ наиболѣе употребительной плоскостію проекціи является (001), иногда (100) или (010). Обыкновенно проектируется только часть шара, та, которая лежитъ выше плоскости проекціи.

Для проектированія плоскость проекціи мысленно помѣщаютъ въ центръ шара. Она дѣлитъ его на двѣ равныя части; въ такомъ случаѣ, плоскость проекціи напр. $(001)=(00\bar{1})$ будетъ *экваторіальною плоскостію* кристалла. Для того, чтобы проектировать на нее плоскости кристалла, наблюдатель мыслится въ одномъ изъ ея полюсовъ напр. въ южномъ S—$(00\bar{1})$—; изъ этого полюса мы мысленно проводимъ линіи до встрѣчи ихъ съ полюсами кристаллическихъ плоскостей въ верхнемъ (сѣверномъ) полушаріи.

Точки, въ которыхъ эти линіи пересѣкутъ экваторіальную плоскость проекціи, будутъ *проекціями полюсовъ* кристаллическихъ плоскостей.

Эти точки мы обозначаемъ индексами соотвѣтствующихъ плоскостей.

234. Разсмотримъ наиболѣе простой случай проекціи какого-нибудь меридіанальнаго круга, т. е. круга, перпендикулярнаго къ плоскости проекціи. Во всѣхъ системахъ со взаимно-перпендикулярными координатными осями, ось Z перпендикулярна къ такой плоскости проекціи и меридіанальный кругъ черезъ нее проходитъ (ей параллеленъ). Меридіанальными плоскостями будутъ призматическія и пинакоидальныя плоскости.

Въ такомъ случаѣ проекція полюса (001) будетъ лежать въ центрѣ круга проекціи (рис. 61—проекція, рис. 62—меридіанальное сѣченіе, проходящее черезъ ось Z).

Каждый меридіанальный кругъ будетъ проектироваться въ видѣ прямой линіи, совпадающей съ діаметромъ круга проекціи—напр. большой кругъ (меридіанъ), проходящій черезъ (010) и (001)—т. е.

кругъ зоны [001 . 010] (§ 164) выразится въ видѣ діаметра AB. На концахъ этого діаметра будутъ лежать проекціи полюсовъ—

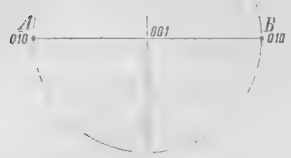


Рис. 61.

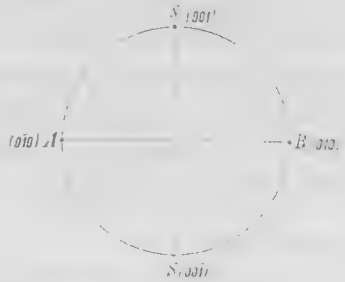


Рис. 62.

(010) и (010). Само собою ясно, что *каждый діаметръ круга проекціи есть проекція какого-нибудь изъ меридіанальныхъ круговъ.*

Чрезвычайно важнымъ свойствомъ такой проекціи является то, что угловыя величины между полюсами могутъ быть чрезвычайно просто и легко изучаемы на сферической проекціи. Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ нѣсколько полюсовъ на данномъ меридіанальномъ кругѣ—напр. (р. 63) отстоящихъ отъ (001) на $10^0, 45^0, 80^0$,—дуги Nc, Nd, Ne. Очевидно проекціи этихъ дугъ на діаметрѣ экваторіальнаго круга будутъ выражаться линіями OC, OD, OE. Величина этихъ линій можетъ быть сейчасъ же выведена, такъ какъ по теоремѣ, извѣстной изъ геометріи, слѣдуетъ, что прямыя, исходящія изъ какой-нибудь точки на окружности (положимъ изъ точки $(00\bar{1})$) отсѣкаютъ на ней дуги, величина которыхъ *вдвое* больше, чѣмъ углы, образуемыя данными линіями. Если мы проведемъ вокругъ S—$(00\bar{1})$, какъ вокругъ центра, кругъ (рис. 63) тѣмъ же радіусомъ, какимъ мы провели кругъ проекціи, то діаметръ AB явится касательной къ этому кругу и разстоянія на немъ OC, OD, OE будутъ тангенсами угловъ, равныхъ половинѣ дугъ между полюсами этихъ точекъ.

Такимъ образомъ на проекціи мы очень просто и легко можемъ получить угловыя величины, соотвѣтствующія угламъ между полюсами шара, т. е. граннымъ угламъ кристаллическаго многогранника (§ 231).

235. Разсмотрѣнный случай былъ частнымъ случаемъ. Въ немъ при проектированіи кругъ выражался въ формѣ прямой линіи и на этой прямой линіи можно было легко получить угловыя вели-

чины полюсовъ. Но въ огромномъ большинствѣ случаевъ эти круги, очевидно, не могутъ проектироваться въ формѣ прямыхъ линій; стоитъ только представить большой кругъ (§ 232), наклонный къ плоскости проекціи или взять любой наклонный малый кругъ. Здѣсь, очевидно, проекція не можетъ быть выражена въ видѣ прямой линіи. Въ этомъ случаѣ *всякій кругъ на шарѣ при стереографической проекціи проектируется въ формѣ круга же*—т. е. угловыя величины между его полюсами при проектированіи не мѣняются и могутъ быть непо-

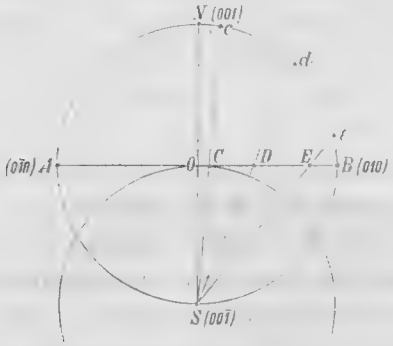


Рис. 63.

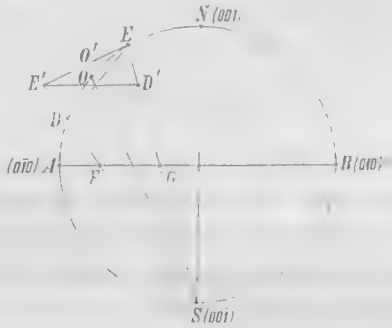


Рис. 64.

средственно отсчитываемы на кругахъ проекціи. Такое свойство стереографической проекціи дѣлаетъ ее чрезвычайно драгоцѣннымъ орудіемъ для кристаллографическихъ работъ, такъ какъ по закону Стенона только эти одни углы и имѣютъ значеніе при изученіи кристаллическаго многогранника.

Для доказательства возьмемъ какой-нибудь малый кругъ DOE на шарѣ; этотъ кругъ захватитъ рядъ полюсовъ, принадлежащихъ къ разнымъ зонамъ (меридіанальный разрѣзъ рис. 64). Если мы соединимъ эти полюсы съ нашей исходной точкой $S=(00\bar{1})$, то всѣ эти прямыя линіи расположатся на поверхности нѣкотораго конуса, вершина котораго будетъ лежать въ точкѣ S; малый кругъ DOE будетъ являться его круговымъ сѣченіемъ, линіи же DS и ES будутъ его образующими.

236. Этотъ конусъ будетъ являться косымъ конусомъ, такъ какъ его круговое сѣченіе наклонно къ его оси. Этой осью будетъ линія OS, дѣлящая пополамъ уголъ, полученный между ея образующими, т. е. уголъ DSE. Если мы дополнимъ такой косой конусъ до прямого конуса, т. е. продолжимъ линію DS до E' такъ, чтобы

$E'S = ES$, то очевидно мы получимъ прямой конусъ $E'ES$, въ которомъ SO, продолженная до SO', будетъ осью конуса—а основаніе EE' къ ней перпендикулярно. Форма этого основанія будетъ эллипсомъ [1]).

Если взять прямой конусъ съ эллиптическимъ основаніемъ, то симметрія его выразится $\lambda^2\ 2P$, при чемъ λ^2 будетъ его осью. А разъ осью конуса будетъ λ^2, то, очевидно, другое круговое сѣченіе $E'D'$ должно находиться подъ одинаковымъ къ оси конуса угломъ съ сѣченіемъ DE. Изъ свойствъ конуса, само собою разумѣется, слѣдуетъ, что всякое сѣченіе, параллельное ED или $E'D'$, будетъ круговымъ сѣченіемъ, а изъ чертежа ясно, что $E'D'$ параллельна плоскости проекціи, т. е. проекція малаго круга DE; эта проекція на діаметрѣ AB выразится линіей FG. Такъ какъ FG параллельна $E'D'$, то она будетъ діаметромъ круга и проекція малаго круга на экваторіальную плоскость не будетъ деформирована—останется кругомъ; слѣдовательно всѣ дуговыя величины между полюсами сохранятся неизмѣнными.

Очевидно, тоже самое останется неизмѣнно вѣрнымъ и тогда, когда малые круги пересѣкаются плоскостію проекціи; но при этомъ часть ихъ выразится на проекціи въ формѣ неполныхъ круговъ, круговыхъ отрѣзковъ и т. д.

237. Все, что вѣрно по отношенію къ малымъ кругамъ, конечно, вполнѣ остается вѣрнымъ и по отношенію къ *большимъ кругамъ*, къ тѣмъ, на которыхъ располагаются полюсы тавтозональныхъ плоскостей (§ 232). Въ этомъ легко убѣдиться изъ чертежей 65 и 66 [2]). Пусть большой кругъ пересѣкаетъ данный меридіанъ въ точкахъ D и E. Его слѣдомъ на меридіанальномъ кругѣ будетъ діаметръ DE (ибо большой кругъ проходитъ черезъ центръ шара). Плоскостію проекціи будетъ экваторіальный кругъ AB, который выразится въ видѣ діаметра AB.

Соединимъ E и D съ S прямыми линіями — очевидно и здѣсь мы получимъ косой конусъ ESD, въ которомъ ED будетъ круговымъ сѣченіемъ. Осью конуса будетъ линія SP, т. е. линія, дѣля-

---

[1]) Въ кругломъ прямомъ конусѣ сѣченіе, наклоненное къ оси его, не можетъ быть кругомъ.

[2]) Вездѣ сохраняется одинаковое буквенное обозначеніе.

щая пополамъ уголъ ESD. Дополнимъ этотъ конусъ до прямаго, продолживъ SD до E', при чемъ $SE'=SE$. Въ такомъ случаѣ конусъ ESE' будетъ прямымъ конусомъ, а его косое сѣченіе DE

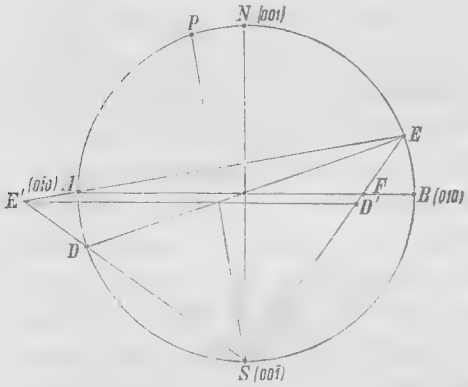


Рис. 65.

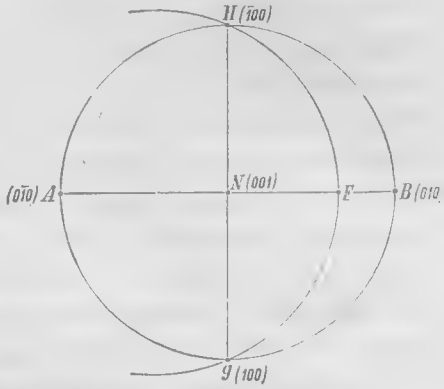


Рис. 66.

будетъ круговымъ. На основаніи симметріи конуса—λ^2 $2P$—другое круговое его сѣченіе будетъ лежать подъ тѣмъ же угломъ къ SP; т. е. слѣдомъ его будетъ $E'D'$. Ясно изъ построенія, что $E'D'$ параллельно AB, а слѣдовательно параллельно тому сѣченію этого конуса, которое является проекціей большого круга ED на экваторіальный кругъ.

Но по самымъ свойствамъ большого круга, всегда проходящаго черезъ центръ шара, не можетъ быть случая, чтобы внутри круга проекціи помѣстился весь этотъ большой кругъ—будетъ помѣщаться только часть его FgH; мы будемъ имѣть всегда проекцію большого полукруга, лежащаго выше плоскости проекціи (рис. 66).

Хотя эта проекція всегда должна быть частію круговой кривой—она, само собою разумѣется, не будетъ половиной круга; чѣмъ ближе уголъ большого круга къ 90° по отношенію къ плоскости, на которую онъ проектируется, тѣмъ радіусъ его круга проекціи становится все бо́льшимъ и бо́льшимъ, ибо его проекція совершенно постепенно приближается къ прямой линіи, каковой является проекція (слѣдъ) большого круга, перпендикулярнаго къ экваторіальному (§ 234). Но при этомъ во всѣхъ случаяхъ онъ долженъ являться частію круговой кривой т. е. хотя бы и очень неболь-

шимъ отрѣзкомъ круга большаго радіуса. Всегда при проекціи концы этихъ отрѣзковъ будутъ лежать на діаметрахъ проекціоннаго круга.

Я не буду останавливаться на дальнѣйшемъ разсмотрѣніи свойствъ этой проекціи и на пріемахъ, съ помощію которыхъ можно легко и просто точно вычерчивать всѣ эти круги и прямыя линіи. Это будетъ сдѣлано въ одной изъ дальнѣйшихъ главъ книги. Здѣсь же важно замѣтить только слѣдующія основныя свойства этой проекціи: всѣ тавтозональныя плоскости остаются при проекціи вмѣстѣ на большихъ кругахъ и будутъ лежать или на круговыхъ отрѣзкахъ, хордами которыхъ будутъ діаметры проекціоннаго круга или же на самихъ діаметрахъ. И въ томъ и въ другомъ случаѣ угловыя величины полюсовъ могутъ быть легко и просто найдены; величина ихъ не не нарушается.

Въ концѣ концовъ мы получимъ цѣлую сѣть сферическихъ треугольниковъ, при чемъ углы этихъ треугольниковъ, разъ они образованы большими кругами, будутъ соотвѣтствовать угламъ между зонами, а ихъ стороны—граннымъ угламъ кристалла. Всѣ вопросы, которые подлежатъ рѣшенію и касаются геометрической формы поліэдровъ, могутъ быть рѣшаемы съ помощью этихъ сферическихъ треугольниковъ, методами сферической тригонометріи.

238. Но хотя я не имѣю въ виду давать изложеніе способовъ проектированія, необходимо обратить вниманіе еще на одно свойство сферической проекціи, именно на отношеніе ея къ *явленіямъ симметріи*. Разсматривая проекцію какого-нибудь кристалла, мы легко можемъ знать его симметрію. Надо только помнить, что въ обычной проекціи мы большею частію проектируемъ только одну половину кристалла; поэтому мы должны быть увѣрены, что часть многогранника, лежащая ниже плоскости проекціи аналогична съ данной. Очевидно, напр., что сферическая проекція гемиморфнаго кристалла—напр. турмалина (рис. 59) на (0001) будетъ различна для аналогичнаго и антилогичнаго его конца.

Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда это не оговорено, мы должны представлять себѣ на проекціи часть многогранника ниже плоскости проекціи совершенно подобной той, которая лежитъ выше плоскости проекцій. Въ такомъ случаѣ проекція будетъ выражать намъ симметрію многогранника такъ же, какъ выражаетъ ее модель или правильный рисунокъ многогранника.

Нѣкоторые изъ діаметровъ плоскости проекцій могутъ при этомъ соотвѣтствовать или $Л^1$ (resp. P), или L^2, а въ центрѣ, перпендикулярно къ плоскости проекцій, можетъ выходить ось симметріи порядка, соотвѣтствующаго повторяемости въ проекціи одинаковаго распредѣленія полюсовъ. Точно также плоскостями симметріи могутъ являться и нѣкоторые большіе круги; въ точкахъ ихъ общаго пересѣченія будутъ выходить оси симметріи. Такъ, напр., кристаллическій многогранникъ *борацита* строенія $3\lambda^2 4L^3 6P$—комбинаціи (рис. 67) {100}. {101}. {111}—даетъ намъ возможность очень ясно выяснить его симметрію, если только мы возьмемъ его про-

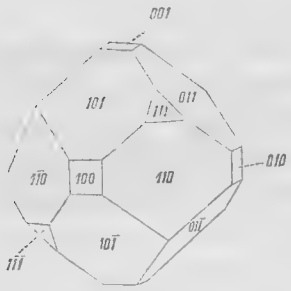


Рис. 67.

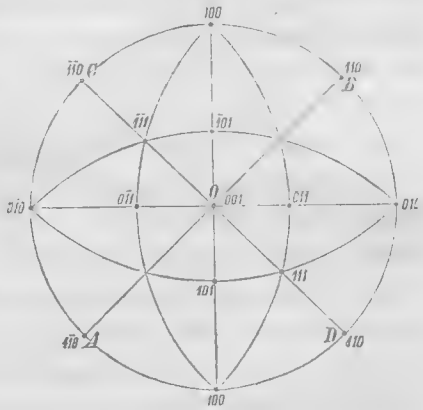


Рис. 68.

екцію на плоскости (001)—фиг. 68; такъ, въ точкѣ (001) выходитъ λ^2, въ (111) и $(1\bar{1}1)$—L^3, круги AOB и COD являются слѣдами плоскостей симметріи—ими же явятся дуги [101 . 111] и [011 . 111] и т. д.

Такое свойство сферической проекціи дѣлаетъ ее еще болѣе удобной и важной для изученія свойствъ кристалловъ, а съ другой стороны заставляетъ выбирать за плоскости проекціи грани, находящіяся въ опредѣленномъ отношеніи къ элементамъ симметріи. Такъ въ правильной системѣ проектируютъ обыкновенно на плоскости {100}, въ квадратной, гексагональной и ромбической на {001} или resp. {0001}, въ моноклинической на {010} или на плоскость, перпендикулярную къ оси Z.

239. Другая проекція—*гномоническая*—имѣетъ гораздо меньшее значеніе и меньшее распространеніе при рѣшеніи задачъ совре-

менной кристаллографіи, по скольку является необходимымъ охватить сразу всѣ свойства многогранника; но она имѣетъ значеніе и интересъ при изученіи распредѣленія плоскостей въ нѣкоторыхъ зонахъ или частяхъ кристалла. Въ кристаллографіи нѣмецкой школы до конца XIX вѣка она господствовала. Гномоническая проекція представляетъ ничто иное, какъ частный случай обыкновенной линейной проекціи, но только въ ней проектируется не плоскость, а перпендикулярный къ плоскости векторъ. Проекція этого вектора на данную плоскость проекціи будетъ также являться въ видѣ точки, *полюса* грани.

Представимъ себѣ такого рода векторы, перпендикулярные къ плоскостямъ кристаллическаго многогранника. Вмѣсто многогранника мы получимъ пучекъ (§ 231) исходящихъ изъ центра его векторовъ; пересѣчемъ этотъ пучекъ на опредѣленномъ разстояніи плоскостію—на этой плоскости, въ мѣстахъ пересѣченія ея векторами, мы получимъ полюсы, которые и дадутъ гномоническую проекцію кристаллическаго многогранника.

Очевидно полюсы всѣхъ тавтозональныхъ плоскостей будутъ при этомъ лежать на одной линіи (§ 168). Мы уже употребляли такого рода гномоническую проекцію, когда выводили свойства отрѣзковъ тавтозональныхъ плоскостей (§ 189).

На такой проекціи всѣ измѣренія угловыхъ величинъ и угловъ между зонами настолько сложнѣе такихъ же свойствъ сферической проекціи, что я оставлю безъ разсмотрѣнія ея дальнѣйшія свойства.

240. **Основныя свойства поясовъ (зонъ) и связь ихъ съ симметріей.** Съ помощью сферической проекціи мы можемъ глубже выяснить геометрическія свойства кристаллическихъ зонъ или поясовъ, нѣкоторыя изъ которыхъ были уже указаны въ §§ 166—167 и 175.

Намъ важно подробнѣе остановиться на этихъ свойствахъ зонъ потому, что на нихъ построена вся вычислительная кристаллографія и только пользуясь ими можно перейти отъ наружной формы многогранника къ его внутренней молекулярной структурѣ—къ его кристаллической ячейкѣ (§ 65). А только кристаллическая ячейка позволяетъ изучать вліяніе химическаго состава на кристаллическую форму.

Среди такихъ свойствъ зонъ наибольшее значеніе имѣютъ теоремы, которыя указываютъ на связь между индексами тавтозональ-

ныхъ (§ 163) плоскостей и ихъ гранными углами. Уже въ § 168 была выведена эта связь для частнаго случая характеристикъ четырехъ тавтозональныхъ плоскостей, отсчитываемыхъ по одной и той же координатной оси, перпендикулярной къ оси зоны. Но аналогичная, конечно болѣе сложная, зависимость можетъ быть найдена и для общаго случая—для всякихъ четырехъ тавтозональныхъ плоскостей, для всѣхъ ихъ характеристикъ, безразлично, какіе бы кристаллическіе ряды (§ 65) ни были выбраны за координатныя оси.

241. Относящіяся сюда основныя теоремы были разработаны Миллеромъ (1839—1858), путемъ анализа ангармоническихъ отношеній (§ 167) въ кристаллическомъ многогранникѣ, причемъ онъ исходилъ изъ идей, намѣченныхъ Нейманномъ и Грассманномъ. Уже Миллеръ привелъ найденныя имъ теоремы въ удобную для работы форму и выработалъ т. о. цѣлую систему вычислительной кристаллографіи, которая мало по малу проникла во всеобщее употребленіе. Дальнѣйшія работы внесли въ нее лишь частныя улучшенія и поправки.

Долгое время одновременно съ ней держались другія формулы, впервые данныя Вейссомъ (1816) и развитыя Купфферомъ (1831), Науманномъ (1830 сл.); въ нихъ вычисленія сводились къ параметрамъ, а не къ индексамъ. Хотя эти выраженія были выработаны внѣ всякой связи со строеніемъ кристалла изъ пучка векторовъ, внѣ всякой связи съ ангармоническимъ отношеніемъ, они по существу могутъ разсматриваться, какъ частный случай болѣе общаго изученія явленій, даннаго Миллеромъ.

242. Для вывода зависимости между индексами тавтозональныхъ плоскостей и ихъ гранными углами, обратимся къ шару, на которомъ нанесены полюсы плоскостей (§ 231).

Пусть X, Y и Z—полюсы координатныхъ осей, а H, M, P, S—соотвѣтственно полюсы четырехъ тавтозональныхъ плоскостей, расположенные на большомъ кругѣ (§ 232), въ порядкѣ буквъ. Индексы этихъ плоскостей будутъ: $H=(hkl)$, $M=(mno)$, $P=(pqr)$, $S=(stu)$.

Возьмемъ сферическіе треугольники, которые образуютъ (§ 237) эти полюсы съ полюсами координатныхъ плоскостей и остановимся на сферическихъ треугольникахъ съ полюсами X (рис. 69). Въ такомъ случаѣ изъ сферическихъ треугольниковъ HMX и MSX мы имѣемъ:

(1) $Cos\ XH = Cos\ XM\ .\ Cos\ HM + Sin\ XM\ .\ Sin\ HM\ .\ Cos\ HMX$ и

(2) $Cos\ XS = Cos\ XM\ .\ Cos\ MS + Sin\ XM\ .\ Sin\ MS\ .\ Cos\ SMX.$

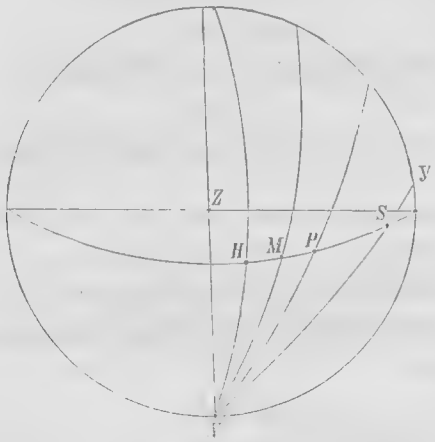


Рис. 69.

Помноживъ уравненіе (1) на $Sin\ MS$, а (2) на $Sin\ HM$— получимъ:

(3) $Cos\ XH\ .\ Sin\ MS = Cos\ XM\ .\ Cos\ HM\ .\ Sin\ MS +$
$+ Sin\ XM\ .\ Sin\ HM\ .\ Sin\ MS\ .\ Cos\ HMX.$

(4) $Cos\ XS\ .\ Sin\ HM = Cos\ XM\ .\ Cos\ MS\ .\ Sin\ HM -$
$Sin\ XM\ .\ Sin\ MS\ .\ Sin\ HM\ .\ Cos\ HMX$ [1]).

Сложивъ уравненія (3) и (4), мы получимъ:

(5) $Cos\ XH\ .\ Sin\ MS + Cos\ XS\ .\ Sin\ HM = Cos\ XM\ .\ Sin\ HS.$

Очевидно, мы получили бы аналогичныя уравненія и для сферическихъ треугольниковъ, образованныхъ полюсами этихъ тавтозональныхъ плоскостей съ Y и Z. Мы можемъ ихъ написать по аналогіи съ (5) сразу, подставивъ Y и Z вмѣсто X:

(6) $Cos\ YH\ .\ Sin\ MS + Cos\ YS\ .\ Sin\ HM = Cos\ YM\ .\ Sin\ HS.$

(7) $Cos\ ZH\ .\ Sin\ MS + Cos\ ZS\ .\ Sin\ HM = Cos\ ZM\ .\ Sin\ HS.$

---

[1]) Т. к. $HMX + SMX = 180^0$, то $Cos.\ SMX = -Cos\ HMX.$

Если мы рѣшимъ эти уравненія (5—6), мы получимъ равенства [1]):

$$\frac{Sin\ HM}{Cos\ YH\,.\,Cos\ XM - Cos\ XH\,.\,Cos\ YM} =$$

$$= \frac{Sin\ MS}{Cos\ XS\,.\,Cos\ YM - Cos\ YS\,.\,Cos\ XM} = \qquad (8).$$

$$= \frac{Sin\ HS}{Cos\ YH\,.\,Cos\ SX - Cos\ XH\,.\,Cos\ YS}\,.$$

При выводѣ этихъ равенствъ, мы все время оставляли въ сторонѣ четвертый полюсъ P; но само собою разумѣется, что если бы мы исходили изъ сферическихъ треугольниковъ HXP и PXS, то мы получили бы совершенно аналогичныя выраженія для дугъ MP, HP и PS, именно:

$$\frac{Sin\ MP}{Cos\ XP\,.\,Cos\ YM - Cos\ YP\,.\,Cos\ XM} =$$

$$= \frac{Sin\ HP}{Cos\ XP\,.\,Cos\ HY - Cos\ PY\,.\,Cos\ HX} = \qquad (9).$$

$$= \frac{Sin\ PS}{Cos\ YP\,.\,Cos\ SX - Cos\ YS\,.\,Cos\ XP}$$

243. Въ этихъ уравненіяхъ, (8) и (9), мы имѣемъ зависимость между гранными углами (ибо углы XP, HP и т. д. суть углы дополнительные къ гранным (§ 231)) и координатными осями, т. к. углы XP, YM и т. д. опредѣляютъ по отношенію къ координатнымъ осямъ положеніе вектора, перпендикулярнаго къ гранямъ.

Мы знаемъ изъ § 154, что эти косинусы связаны между собою и съ индексомъ перпендикулярной къ вектору плоскости, простымъ уравненіемъ, а именно:

$\frac{a}{h}\ Cos\ XH = \frac{b}{k}\ Cos\ YH = \frac{c}{l}\,.\ Cos\ ZH$, гдѣ a, b, c—кристаллическія оси, а (hkl) индексъ полюса H (т. е. индексъ—перпендикулярной къ вектору OH—плоскости).

Соотвѣтственно, мы также имѣемъ:

---

[1]) Очевидно, совершенно аналогичныя уравненія получатся и тогда, когда мы примемъ во вниманіе уравненіе (7).

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{a}{m}\ Cos\ XM = \frac{b}{n}\ Cos\ YM = \frac{c}{o}\ Cos\ ZM. \\ \frac{a}{p}\ Cos\ XP = \frac{b}{q}\ Cos\ YP = \frac{c}{r}\ Cos\ ZP. \\ \frac{a}{s}\ Cos\ XS = \frac{b}{t}\ Cos\ YS = \frac{c}{u}\ Cos\ ZS. \end{cases}$$

Подставивъ эти величины въ уравненія (8 — 9) мы получимъ равенство:

$$\frac{Sin\ HP}{Sin\ MP} = \frac{n}{k}\left(\frac{kp-hq}{np-mq}\right)\frac{Cos\ HY}{Cos\ MY} \quad .... (11)$$

$$\frac{Sin\ HS}{Sin\ MS} = \frac{n}{k}\ \frac{Cos\ HY}{Cos\ MY}\ \frac{ks-ht}{ns-mt} \quad .... (12)$$

Эти два уравненія (11) и (12)—очевидно, могутъ быть выражены въ формѣ, аналогичной ангармоническому отношенію, а именно:

$$(13)\ ....\ \frac{Sin\ HP}{Sin\ HS} : \frac{Sin\ MP}{Sin\ MS} = \frac{kp-hq}{ks-ht} \cdot \frac{np-mq}{ns-mt} \text{ или}$$

$$\frac{Sin\ HP\ .\ Sin\ MS}{Sin\ HS\ .\ Sin\ MP} = \frac{kp-hq}{ks-ht} \cdot \frac{ns-mt}{np-mq} = A$$

Но, конечно, вторая часть равенства ($= A$) можетъ быть выражена иначе, исходя изъ уравненій (10) и мы можемъ найти, что

$$\frac{Sin\ HP\ .\ Sin\ MS}{Sin\ HS\ .\ Sin\ MP} = \frac{kp-hq}{ks-ht} \cdot \frac{ns-mt}{np-mq} =$$

$$= \frac{lp-hr}{ls-hu} \cdot \frac{os-mu}{op-mr} = \frac{kr-lq}{ku-lt} \cdot \frac{nu-ot}{nr-oq}. \quad ... (13a)$$

Но то же явленіе можно выразить еще иначе. Ибо, исходя изъ уравненій (8) и (9), легко получимъ и такое равенство (14):

$$\frac{Sin\ HM.\ Sin\ SP}{Sin\ HP.\ Sin\ SM} = \frac{km-hn}{kp-hq} \cdot \frac{tp-sq}{tm-sn} =$$

$$= \frac{lm-ho}{lp-hr} \cdot \frac{up-sr}{um-so} = \frac{ko-ln}{kr-lq} \cdot \frac{tr-qu}{to-nu}. \quad .... (14)$$

244. Уравненія (13) и (14) являются исходными для всѣхъ вопросовъ вычислительной кристаллографіи. Какъ мы увидимъ ниже,

они значительно упрощаются въ зависимости отъ явленій симметріи и выбора координатныхъ осей.

Оставляя пока въ сторонѣ эти упрощенія, необходимо остановиться на нѣкоторыхъ общихъ ихъ свойствахъ. Во-первыхъ, они даютъ возможность рѣшить слѣдующую задачу. *Найти величину четырехъ гранныхъ угловъ, когда даны четыре индекса послѣдовательныхъ тавтозональныхъ плоскостей и два изъ гранныхъ угловъ между ними.*

Положимъ даны H, M, P и S (рис. 69).

Изъ уравненія (14) имѣемъ:

$$A = \frac{km-hn}{kp-hq} \cdot \frac{tp-sq}{tm-sn} = \frac{Sin\ HM\ .\ Sin\ SP}{Sin\ HP\ .\ Sin\ SM} = \frac{Sin\ HM\ .\ Sin\ (HS-HP)}{Sin\ HP\ .\ Sin\ (HS-HM)}. \quad \ldots (15)$$

Сверхъ того изъ тригонометріи извѣстно, что:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Sin\ HM}{Sin\ MS} &= \frac{Sin\ HM}{Sin\ (HS-HM)} = \frac{1}{Sin\ HS\ (Ctg\ HM - Ctg\ HS)} \text{ и} \\ \frac{Sin\ SP}{Sin\ HP} &= \frac{Sin\ (HS-HP)}{Sin\ HP} = Sin\ HS\ (Ctg\ HP - Ctg\ HS). \end{aligned}\right\} (16)$$

Подставивъ эти величины въ уравненіе (15), имѣемъ:

$$\frac{Ctg\ HP - Ctg\ HS}{Ctg\ HM - Ctg\ HS} = \frac{km-hn}{kp-hq} \cdot \frac{tp-sq}{tm-sn} = A \ldots (17)$$

Или какъ ясно изъ уравненій § 242,

$$A = \frac{km-hn}{kp-hq} \cdot \frac{tp-sq}{tm-sn} = \frac{lm-ho}{lp-hr} \cdot \frac{up-sr}{um-so} = \frac{ko-ln}{kr-lq} \cdot \frac{tr-qu}{to-nu}.$$

Это уравненіе (17), очевидно, даетъ возможность найти всякій гранный уголъ между данными 4-мя тавтозональными плоскостями, зная ихъ индексы и два угла (напр., зная углы HP и HM, можно найти PS).

245. Также легко можетъ быть рѣшена и обратная задача: *по даннымъ угламъ четырехъ тавтозональныхъ плоскостей и индексамъ трехъ изъ нихъ, найти индексы четвертой.*

Для полученія соотвѣтственныхъ формулъ обратимся къ уравненіямъ (5), (6) и (7)—§ 243, а именно (рис. 69):

$$(5-7) \left\{\begin{aligned} Cos\ XH\ .\ Sin\ MS + Cos\ XS\ .\ Sin\ HM &= Cos\ XM\ .\ Sin\ HS \\ Cos\ YH\ .\ Sin\ MS + Cos\ YS\ .\ Sin\ HM &= Cos\ YM\ .\ Sin\ HS \\ Cos\ ZH\ .\ Sin\ MS + Cos\ ZS\ .\ Sin\ HM &= Cos\ ZM\ .\ Sin\ HS \end{aligned}\right\}$$

Раздѣливъ эти уравненія на $Sin\ MS$ и исключивъ изъ нихъ $\frac{Sin\ HS}{Sin\ MS}$, мы легко получимъ изъ нихъ три уравненія (18).

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{Sin\ HM}{Sin\ MS} = \frac{Cos\ HY\,.\,Cos\ MX - Cos\ HX\,.\,Cos\ MY}{Cos\ SX\,.\,Cos\ MY - Cos\ SY\,.\,Cos\ MX} = \\ \qquad = \frac{Cos\ HX\,.\,Cos\ MZ - Cos\ HZ\,.\,Cos\ MX}{Cos\ SZ\,.\,Cos\ MX - Cos\ SX\,.\,Cos\ MZ} = \\ \qquad = \frac{Cos\ HZ\,.\,Cos\ MY - Cos\ HY\,.\,Cos\ MZ}{Cos\ SY\,.\,Cos\ MZ - Cos\ SZ\,.\,Cos\ MY}. \end{cases}$$

Принимая во вниманіе уравненіе (10) (§ 243) и сдѣлавъ необходимыя сокращенія, мы прійдемъ легко къ уравненію (19):

$$(19)\quad \left.\begin{aligned} \frac{Sin\ HM}{Sin\ MS} &= \frac{km-hn}{mt-ns}\,.\,\frac{s\ Cos\ HX}{h\ Cos\ SX} = \\ &= \frac{lm-oh}{mu-os}\,.\,\frac{s\ Cos\ HX}{h\ Cos\ SX} = \\ &= \frac{ko-ln}{to-nu}\,.\,\frac{s\ Cos\ HX}{h\ Cos\ SX}. \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, изъ (19) уравненія слѣдуетъ простая зависимость между индексами тавтозональныхъ плоскостей:

$$(20)\quad \frac{km-hn}{tm-ns} = \frac{lm-oh}{mu-os} = \frac{ko-ln}{to-nu} = B$$

Подставивъ эту величину въ ур. (14) и (17) (resp. 15), мы получимъ данную зависимость выраженною или въ синусахъ или въ котангенсахъ. Именно мы имѣемъ, положивъ равнымъ

$$C = \frac{Ctg\ HP - Ctg\ HS}{Ctg\ HM - Ctg\ HS},$$

слѣдующія равенства:

$$(21)\ \ldots\ B = \frac{kp-hq}{tp-sq}\,.\,C = \frac{lp-hr}{up-sr}\,.\,C = \frac{kr-lq}{tr-uq}\,.\,C.$$

Изъ уравненія (20), рѣшивъ его, мы можемъ получить окончательныя выраженія для индексовъ плоскости $M = (mno)$:

$$(22) \ldots \quad \begin{aligned} m &= p + hB \\ n &= q + kB \\ o &= r + lB, \end{aligned}$$

при чемъ B зависитъ, какъ ясно изъ уравненія (21), отъ угловыхъ величинъ между гранями тавтозональныхъ плоскостей.

Т. о. изъ уравненій (21) и (22) можно найти индексы кристаллической плоскости $M = (mno)$, разъ даны индексы трехъ другихъ плоскостей, съ ней тавтозональныхъ и гранные углы между ними.

246. Эти уравненія имѣютъ совершенно общій характеръ; они не зависятъ ни отъ выбора координатныхъ осей, ни отъ характера угловъ между тавтозональными плоскостями.

Между тѣмъ эти углы не могутъ имѣть любую величину, какъ это видно изъ закона Гаюи (§ 184 сл.) и изъ явленій симметріи. Изъ закона Гаюи слѣдуетъ, что ангармоническое отношеніе пучка тавтозональныхъ векторовъ должно имѣть раціональную величину, а изъ законовъ симметріи, что въ зонахъ могутъ встрѣчаться углы, которые не зависятъ ни отъ химическаго состава тѣла, ни отъ тѣхъ физическихъ условій, въ которыхъ оно находится.

Такими углами являются углы между идентичными векторами (§ 44), совпадающими другъ съ другомъ при вращеніи вокругъ какой нибудь оси симметріи. Такъ напр. при вращеніи вокругъ L^3 вектора ей перпендикулярнаго, очевидно, онъ долженъ три раза совпадать съ идентичнымъ съ нимъ векторомъ. Углы между этими векторами равны 60°. Этотъ уголъ въ 60° сохраняется въ тѣлѣ *всегда*, онъ абсолютно не мѣняется ни при измѣненіи температуры или электрическихъ и магнитныхъ свойствъ пространства, ни при измѣненіи химическаго состава, разъ только сохраняется кристаллическое строеніе, въ которомъ кристаллизируется данное тѣло.

Очевидно, эти углы могутъ существовать только въ нѣкоторыхъ зонахъ, опредѣленнымъ образомъ расположенныхъ по отношенію къ элементамъ симметріи, и въ этихъ зонахъ количество такихъ угловъ строго опредѣленно, что̀ вытекаетъ изъ понятія объ элементахъ симметріи.

Для этихъ зонъ не надо брать 4 тавтозональныя плоскости; до-

статочно знать одинъ гранный уголъ, индексы двухъ плоскостей. Добавляя къ нимъ неизмѣнные углы, мы получимъ достаточно данныхъ для рѣшенія всѣхъ вопросовъ.

Такого рода углами могутъ быть только 90°, 60°, 45° или 30°— въ зависимости отъ существованія въ кристаллѣ L^2, L^3, L^4 и L^6.

247. Нахожденіе въ зонѣ всѣхъ или нѣкоторыхъ изъ этихъ угловъ, очевидно, зависитъ отъ симметріи, а съ другой стороны оно, конечно, мѣняетъ геометрическія свойства зоны, т. к. эти углы вполнѣ постоянны.

Съ другой стороны, очевидно, вхожденіе такихъ неизмѣнныхъ величинъ въ формулы, выражающія геометрическія свойства зонъ, уменьшаетъ въ нихъ количество перемѣнныхъ, упрощаетъ ихъ, а слѣдовательно, въ значительной мѣрѣ измѣняетъ ходъ и характеръ кристаллографическихъ вычисленій.

Поэтому, разработка и изученіе такихъ свойствъ имѣютъ большое значеніе въ кристаллографіи и въ этой области мы имѣемъ многочисленныя работы различныхъ изслѣдователей. Первыя попытки видны уже въ работахъ Миллера, но впервые вопросъ былъ поставленъ въ общей формѣ В. фонъ Лангомъ (1866), который указалъ на связь различнаго типа зонъ съ симметріей строенія— затѣмъ того же вопроса касался Стори Маскеляйнъ (1895) и наконецъ въ многочисленныхъ мемуарахъ Федоровъ (1891—1902).

Полная разработка этихъ свойствъ зонъ можетъ дать намъ вполнѣ стройное и цѣльное впечатлѣніе о всѣхъ законахъ геометрической кристаллографіи; она можетъ охватить почти всѣ вопросы, которыхъ мы касались раньше, исходя изъ другихъ точекъ зрѣнія.

248. Я коснусь здѣсь, однако, только нѣкоторыхъ основныхъ выводовъ ученія о зонахъ—тѣхъ, которые имѣютъ физическое значеніе или вводятъ значительныя упрощенія въ основныя формулы геометрической кристаллографіи.

Всѣ зоны могутъ быть раздѣлены на нѣсколько группъ.

Во первыхъ мы имѣемъ зоны въ которыхъ *можетъ* встрѣчаться нѣсколько вполнѣ одинаковыхъ [1]) угловъ. Эти зоны мы будемъ на-

---

[1]) Очевидно, мы принимаемъ во вниманіе только углы, которые не мѣняются ни при какихъ измѣненіяхъ химическаго состава или температуры и другихъ условій внѣшней среды.

зывать *изогональными зонами.* Такого рода изогональныя зоны могутъ состоять: 1) изъ 4 граней (т. е. изъ 2 паръ параллельныхъ), когда осью зоны служатъ L^2 или L^4, а уголъ между векторами къ плоскостямъ (φ) равенъ 90^0 (ср. § 255), 2) изъ 3 граней, когда осью зоны служитъ L^3, а $\varphi = 60^0$, 3) изъ 8 (4 паръ параллельныхъ) или 4 граней, когда осью зоны является L^4, а $\varphi = 45^0$ и наконецъ 4) изъ 6 граней (или 6 паръ параллельныхъ), когда L^6 есть ось зоны, а $\varphi = 30^0$.

Очевидно никакихъ другихъ изогональныхъ зонъ не можетъ быть въ тѣлѣ, т. к. 1) не можетъ быть никакихъ другихъ осей симметріи, которыя вызывали бы постоянство угловъ φ и 2) при всякомъ другомъ углѣ φ, ангармоническое отношеніе приметъ ирраціональную величину (§ 175).

249. Мы видѣли (§§ 167 сл.), что всѣ геометрическія свойства зонъ такъ или иначе выводятся изъ ангармоническаго отношенія ихъ векторовъ. Изъ 4 возможныхъ случаевъ изогональныхъ зонъ— только два случая даютъ количество векторовъ, достаточное для построенія ангармоническаго отношенія: при $\varphi = 45^0$ и 30^0.

Въ двухъ другихъ случаяхъ (при $\varphi = 90^0$ и 60^0), количество векторовъ недостаточно для построенія ангармоническаго пучка: но, какъ мы увидимъ ниже, эти два случая легко сводятся къ изогональнымъ зонамъ съ $\varphi = 45^0$ и 30^0 (§ 255).

Ангармоническое отношеніе для изогональнаго пояса можетъ быть выражено (§ 175) въ формѣ уравненія $\frac{Sin^2\ 2\varphi}{Sin^2\ \varphi}$. Если мы рѣшимъ его, то получимъ:

$$\text{для } \varphi = 45^0 \ldots \frac{Sin^2\ 2\varphi}{Sin^2\ \varphi} = 2$$

$$\text{а для } \varphi = 30^0 \ldots \frac{Sin^2\ 2\varphi}{Sin^2\ \varphi} = 4$$

Если мы подставимъ эти величины въ уравненія (13—22), выражающія связь индексовъ плоскостей съ ангармоническимъ отношеніемъ, мы получимъ для этихъ изогональныхъ зонъ:

1) Для $\varphi = 45$:

Изъ уравненія (13) (§ 243):

$$2 = \frac{kp - hq}{ks - ht} \cdot \frac{ns - mt}{np - mq} =$$

$$= \frac{lp - hr}{ls - hu} \cdot \frac{os - mu}{op - ms} = \text{и т. д.}$$

Изъ уравненія (14) (§ 243): $\frac{1}{2}=\frac{km-hn}{kp-hq}\cdot\frac{tp-sq}{tm-sn}=$ и т. д.

» (20—22) (§ 245): $\begin{cases} m=p+hB \\ n=q+kB \\ o=r+lB \end{cases}$ гдѣ $B=\frac{kp-hq}{tp-sq}\cdot\frac{1}{2}$

2) Для $\varphi=30^0$:

Изъ уравненія (13) (§ 243): $4=\frac{kp-hq}{ks-ht}\cdot\frac{ns-mt}{np-mq}=$ и т. д.

» (14) (§ 243): $\frac{1}{2}=\frac{km-ha}{kp-hq}\cdot\frac{tp-sq}{tm-sn}=$ и т. д.

» (20—22) (§ 245): $m=p+hB$ и т.. д, гдѣ

$$B=\frac{1}{4}\cdot\frac{kp-hq}{tp-sq}.$$

250. Эти уравненія даютъ намъ выраженія индексовъ только для *однородныхъ* плоскостей, т. е. для плоскостей, связанныхъ между собою тою осью симметріи, которая является осью зоны.

Но въ зонѣ могутъ быть и другія плоскости, которыя несвязаны осью симметріи съ данными плоскостями; въ такомъ случаѣ ихъ индексы конечно не соотвѣтствуютъ выраженіямъ § 249, но въ то же время относящіяся къ нимъ формулы могутъ быть также значительно упрощены.

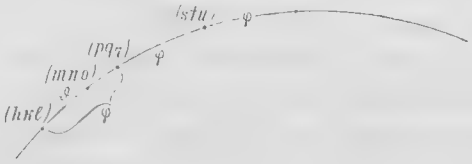


Рис. 70.

Если мы имѣемъ какую нибудь плоскость (hkl) (рис. 70) изогональнаго пояса съ угломъ φ, для которой извѣстенъ ея уголъ (не равный φ) съ какой нибудь другой плоскостію (mno) той же зоны, этихъ данныхъ совершенно достаточно для того, чтобы найти болѣе простыя формулы, т. к. мы знаемъ, что въ зонѣ должно быть n плоскостей, аналогичныхъ (hkl) съ угломъ φ между ними (напр. (pqr) и т. д.) и столько же плоскостей, аналогичныхъ (mno) съ тѣмъ же угломъ φ между ними. Полагая уголъ $(hkl):(mno)=\vartheta$, мы имѣемъ, напр.:

Для $\varphi = 45^0$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(Ctg\,\vartheta + 1) = \frac{kp-hq}{ks-ht} \cdot \frac{ns-mt}{np-mq} = \text{и т. д. (когда } \vartheta > 45^0) \\ \frac{1}{1-Ctg\,45 . tg\,\vartheta} = \frac{kp-hq}{ks-ht} \cdot \frac{ns-mt}{np-mq} = \text{и т. д. (когда } \vartheta < 45^0) \end{array}\right\} \text{из формулы (13)— § 243.}$$

А изъ формулы (20—22), § 245: $\left\{\begin{array}{l} m = p + hB \\ n = q + kB \\ p = r + lB \end{array}\right.$ гдѣ $B = \frac{kp-hq}{tp-sq}$

Аналогичныя формулы тѣмъ же путемъ можно получить для $\varphi = 30^0$.

251. Чрезвычайно важнымъ свойствомъ кристаллическихъ зонъ является то обстоятельство, что въ нихъ одновременно не могутъ являться постоянными (§ 247) углы въ 30^0 и 45^0, если какой нибудь изъ нихъ находится въ зонѣ многократно. Невозможность многократнаго нахожденія обоихъ угловъ ясна уже изъ того, что одна и та же ось симметріи не можетъ быть въ кристаллѣ одновременно осью симметріи 4-го и 6-го порядковъ, т. к. въ такомъ случаѣ она должна быть осью симметріи 12-го порядка, что въ кристаллическихъ тѣлахъ невозможно (§ 92), между тѣмъ многократность одинаковыхъ угловъ въ кристаллѣ обусловливается только симметріей

Но тоже самое въ болѣе общей формѣ ясно вытекаетъ и изъ того положенія, что ангармоническое отношеніе угловъ, равныхъ 45^0 и 30^0 — при чемъ одинъ или оба изъ нихъ повторяются — неизбѣжно будетъ имѣть ирраціональную величину. Конечно это вѣрно только тогда, когда такихъ угловъ находится нѣсколько, т. е. когда повтореніе вызывается элементами симметріи строенія. Въ такомъ случаѣ точки H, M, P и S (рис. 69) всегда можно взять на разстояніи другъ отъ друга равномъ 45^0, 15^0, 75^0 и 30^0. Какъ бы мы ихъ ни комбинировали, всегда мы получимъ ирраціональную величину ангармоническаго отношенія.

Т. о. въ кристаллическихъ зонахъ не могутъ одновременно встрѣчаться неизмѣнные повторяющіеся гранные углы въ 30^0 и 45^0.

252. Вернемся теперь къ разсмотрѣнію дальнѣйшихъ свойствъ зонъ. Во первыхъ могутъ быть зоны, въ которыхъ нѣтъ никакихъ неизмѣнныхъ угловъ и для которыхъ, очевидно, будутъ существовать въ общей формѣ всѣ законности, указанныя въ §§ 242 сл. Та-

кіе пояса или зоны будемъ называть *косыми поясами* (Федоровъ 1897). Они являются характерными для нѣкоторыхъ кристаллическихъ системъ, напр. для триклинической, въ которой не можетъ быть никакихъ другихъ зонъ.

Съ другой стороны могутъ быть и такіе случаи, въ которыхъ *всѣ углы неизмѣнны* — т. наз. *изотропныя зоны* [1]). Эти изотропныя зоны встрѣчаются всегда во всѣхъ тѣхъ строеніяхъ, которыя принадлежатъ къ изотропной группѣ кристалловъ, т. е. въ правильной системѣ (§ 132); здѣсь всѣ зоны безъ исключенія изотропны.

Въ этомъ легко убѣдиться изъ разсмотрѣнія условій измѣнчивости гранныхъ угловъ; они очевидно могутъ мѣняться только при измѣненіи объема кристалла, т. е. при измѣненіи температуры, напряженія электрическаго или магнитнаго поля и т. п. свойствъ окружающей и проникающей кристаллъ среды, законы которой выражаются эллипсоидомъ (§ 128). Въ тѣлахъ правильной системы, по характеру ея симметріи, эти свойства выражаются шаромъ (§ 132) и, слѣдовательно, не мѣняются въ зависимости отъ направленія. Поэтому гранные углы въ этихъ поліэдрахъ остаются одинаковыми, при какихъ бы условіяхъ мы ихъ ни измѣряли.

253. Кромѣ зонъ этой системы, изотропными поясами могутъ быть тѣ пояса, осью которыхъ является L^∞ одноосной группы кристалловъ (§ 131), т. е. пояса квадратной и гексагональной системы, параллельные оси Z, ибо перпендикулярно къ этой оси всѣ физическія свойства во всѣ стороны мѣняются одинаково, слѣдовательно углы между векторами не могутъ измѣняться.

Очевидно это будутъ изогональныя зоны съ угломъ въ 45°, 90°, 30° и 60°, разсмотрѣнныя въ § 249.

Въ одноосной и двухосной группахъ кристалловъ (§ 128 сл.) по характеру эллипсоидовъ не можетъ быть никакихъ другихъ направленій, которыя бы явились осями изотропныхъ зонъ, ибо, какъ легко сообразить, при измѣненіи объема эллипсоида вращенія всѣ векторы, неперпендикулярныя къ L^∞, будутъ мѣнять направленіе—слѣдовательно углы между ними измѣнятся; а въ эллипсоидѣ о трехъ

---

[1]) Я употребляю здѣсь это названіе въ другомъ опредѣленіи, чѣмъ это дѣлаетъ Федоровъ (1897), введшій его въ науку. Онъ называетъ изотропнымъ поясомъ такой, въ которомъ находятся minimum двѣ пары перпендикулярныхъ плоскостей.

осяхъ такое измѣненіе будетъ происходить со всѣми векторами, кромѣ его осей; — но перпендикулярные къ этимъ осямъ векторы различны по величинѣ, слѣдовательно нормальныя къ нимъ плоскости при расширеніи или сжатіи тѣла не могутъ сохранять гранные углы съ другими плоскостями неизмѣнными.

Т. о. *изотропными зонами будутъ: 1) всѣ зоны правильной системы и 2) зоны, параллельныя оси Z въ гексагональной и квадратной системахъ.*

254. Есть еще одно свойство изотропной зоны, которое имѣетъ большое значеніе. *Каждая ея плоскость можетъ имѣть* [1]) *въ той же зонѣ другую, къ ней перпендикулярную.*

Оставляя въ сторонѣ болѣе сложное доказательство этого положенія можно прійти къ нему изъ слѣдующихъ соображеній. Въ правильной системѣ всякая плоскость относится къ взаимно-прямоугольнымъ координатнымъ осямъ и кристаллическія оси всѣ равны между собою т. е. могутъ быть приняты за единицу (§ 126). Поэтому общее уравненіе плоскости (hkl) (§ 159) здѣсь превратится въ:

$$hx + ky + lz = 1$$

А линія, перпендикулярная къ данной плоскости (hkl) будетъ выражаться какъ извѣстно изъ аналитической геометріи при этомъ слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{k} = \frac{z}{l}.$$

Очевидно h, k и l—будутъ цѣлыми и раціональными числами— т. е. такая линія, перпендикулярная къ данной плоскости, подобно ей, подчиняется закону параметровъ, слѣдовательно (§ 165) можетъ быть осью зоны и плоскость черезъ нея проходящая можетъ существовать въ кристаллѣ.

Очевидно это возможно для всякой плоскости правильной системы и потому въ правильной системѣ всякій изотропный поясъ можетъ имѣть столько паръ взаимноперпендикулярныхъ плоскостей, сколько плоскостей въ немъ находится.

255. Тоже самое существуетъ и для изотропныхъ поясовъ квад-

---

[1]) Подъ возможностью существованія плоскости я подразумѣваю плоскость, кристаллографически возможную, т. е. такую, которая подчиняется закону Гаюи.

ратной и гексагональной системъ. Въ нихъ ордината по Z равна 0, а кристаллическія оси по X и Y равны между собою; слѣдовательно въ этомъ поясѣ сохраняются уравненія § 254 и линія, перпендикулярная къ плоскости этой зоны есть ось зоны.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что изотропный поясъ гексагональной системы можетъ быть сведенъ къ изогональному съ $\varphi = 30^0$ и соотвѣтственно можетъ получить аналогичныя формулы (§ 249)—а изотропный поясъ квадратной системы (изогональный съ $\varphi = 90^0$) сводится къ изогональному поясу съ $\varphi = 45^0$. Въ самомъ дѣлѣ если мы въ пучкѣ плоскостей съ $\varphi = 60^0$ возьмемъ къ каждой плоскости перпендикулярную къ ней (ихъ будетъ 3, т. к. ось пояса есть L^3), то получимъ изогональный поясъ съ $\varphi = 30^0$ и т. д.

Т. о. мы имѣемъ: 1) Въ правильной системѣ изотропные изогональные пояса съ $\varphi = 30^0$, $\varphi = 45^0$ и изотропные не изогональные пояса, 2) въ гексагональной сист. одинъ изотропный поясъ—изогональный съ $\varphi = 30^0$ и въ 3) въ квадратной сист. одинъ изотропный поясъ—изогональный съ $\varphi = 45^0$.

256. Само собою разумѣется, что далеко не всѣ изотропные пояса могутъ быть изогональными; такими будутъ только пояса параллельные L^n. Но и въ обычныхъ изотропныхъ поясахъ всѣ формулы получаютъ совершенно простой видъ, т. к. каждый такой поясъ можетъ быть сведенъ къ случаю пучка изъ двухъ паръ взаимноперпендикулярныхъ прямыхъ, дѣлающихъ между собою уголъ $\chi = SP = HM$ (рис. 71). Пусть уголъ $HM = \chi$. И для H и для M въ этомъ поясѣ непремѣнно должны быть черезъ 90^0 полюсы P и S ($P \mid H$, $S \mid M$).

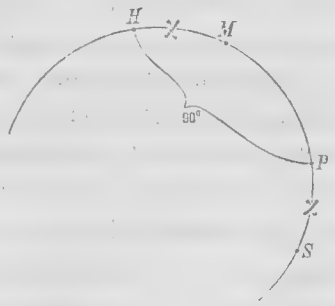


Рис. 71.

Тогда формулы превращаются:

Ур. (13) (§ 243) въ $\dfrac{1}{Cos\,\chi . Sin\,\chi} = \dfrac{kp-hq}{ks-ht} \cdot \dfrac{hs-mt}{np-mq} =$ и т. д.

» (14) (§ 243) » $Cos\,\chi . Sin\,\chi = \dfrac{km-hn}{kp-hq} \cdot \dfrac{tp-sq}{tm-sn} =$ и т. д.

» (20—22) (§ 245) » $m = p + h \cdot \dfrac{kp-hq}{tp-sq} \cdot \dfrac{tg\chi}{Ctg\chi - tg\chi}$ и т. д.

257. Мы оставили до сихъ поръ безъ вниманія еще одинъ случай, который содержитъ постоянные углы и можетъ быть изогональнымъ; это случай зонъ правильно расположенныхъ по отношенію къ L^2. Свойства L^2 таковы, что всякій векторъ, наклонный къ L^2 подъ какимъ-нибудь угломъ ϑ, имѣетъ идентичный съ нимъ векторъ, лежащій подъ тѣмъ же самымъ угломъ ϑ къ L^2. Причемъ одинаковость наклона къ L^2 этой пары векторовъ сохраняется при всякихъ внѣшнихъ условіяхъ, хотя бы величина ϑ мѣнялась. Когда $\vartheta=90^0$, оба вектора совпадутъ, но всегда останутся перпендикулярными къ L^2. Понятно, что плоскость, проходящая черезъ L^2 и перпендикулярный къ ней векторъ будутъ всегда взаимно перпендикулярны; а потому въ зонахъ, ось которыхъ (векторъ) перпендикулярна къ L^2, всегда будетъ одна—и только одна—пара взаимноперпендикулярныхъ плоскостей. Такіе пояса мы будемъ называть *ортогональными поясами.*

Очевидно они могутъ встрѣчаться во всѣхъ системахъ гдѣ есть L^2 или P [1]). Въ этихъ системахъ ортогональными поясами будутъ такіе, ось которыхъ перпендикулярна къ L^2 или лежитъ въ плоскости симметріи P. Слѣдовательно сюда относится огромное количество зонъ во всѣхъ системахъ, кромѣ триклинической.

Ортогональныя зоны также даютъ упрощенія во всѣхъ формулахъ, ибо въ каждой такой зонѣ одинъ изъ угловъ можетъ быть всегда равенъ 90^0 и вслѣдствіе этого формулы получаютъ слѣдующій видъ, если измѣренъ уголъ данной плоскости съ одной изъ тѣхъ, которыя образуютъ между собою 90^0.

Форм. (13), § 243: $1+tg\alpha \,.\, tg\,\beta=\frac{kp-hq}{ks-ht}\,.\,\frac{ns-mt}{np-mq}=$ и т. д.

» (14), § 243: $tg\beta-tg\,\alpha=\frac{km-hn}{kp-hq}\,.\,\frac{tp-sq}{tm-sn}=$ и т. д.

» (20—22) § 245: $m=p+h\,.\,\frac{kp-hq}{tp-sq}\,.\,\frac{tg\alpha}{Ctg\beta-tg\alpha}=$ и т. д.

---

[1]) Понятно, что плоскости одинаково наклоненныя къ P — сохраняютъ равенство наклона всегда, пока существуетъ P. Слѣдовательно перпендикулярная къ P плоскость всегда остается къ ней перпендикулярной.

ГЛАВА V.

Обзоръ кристаллическихъ строеній.

258. Общія основанія систематики 32 кристаллическихъ строеній (классовъ). Въ предыдущихъ параграфахъ мы уже касались различія въ геометрическихъ свойствахъ кристаллическихъ системъ; это, напр. проявилось очень рѣзко въ только что указанныхъ свойствахъ зонъ.

Но намъ необходимо ознакомиться еще съ тѣми геометрическими свойствами, которыя позволяютъ отличать другъ отъ друга кристаллическіе многогранники 32 кристаллическихъ строеній. Наиболѣе легко и просто это достигается изученіемъ *простыхъ формъ* (§ 177 сл.), ибо для каждаго изъ 32 кристаллическихъ строеній простыя формы отличаются по количеству входящихъ въ нихъ плоскостей, а въ случаѣ образованія ими замкнутыхъ многогранниковъ (§ 182) по формѣ этихъ многогранниковъ.

Въ изложеніи кристаллографіи одно время этотъ послѣдній признакъ игралъ первенствующую роль и отдѣльные многогранники—простыя формы—подвергались детальному описанію, получили особыя названія. Но съ теченіемъ времени, съ углубленіемъ въ пониманіи явленій симметріи, наружный видъ простыхъ формъ получалъ все меньшее и меньшее значеніе и тѣ названія, которыя имъ придавались мало по малу стали исчезать изъ обращенія. Во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи я буду опредѣлять простыя формы ихъ индексами и сведу количество ихъ названій до minimum'а—тѣмъ болѣе, что одна и таже простая форма получила въ различныхъ классификаціяхъ разныя наименованія и въ этой области безъ всякой нужды возникли вредныя усложненія. Между тѣмъ индексъ простой формы вмѣстѣ съ символомъ симметріи того строенія, къ которому она относится, вполнѣ достаточны для того, чтобы знать всѣ главныя

ея геометрическія свойства и отличить отъ всякой другой простой формы любого изъ 32 строеній.

259. Кристаллическія системы, какъ мы видѣли, характеризуются положеніемъ въ пространствѣ координатныхъ осей (§ 122) и относительными размѣрами кристаллическихъ осей (§ 159). При чемъ, координатныя и кристаллическія оси образуютъ кристаллическую ячейку, форма которой характеризуетъ структуру кристалла (§ 120 сл.).

Выборъ координатныхъ и кристаллическихъ осей далеко не всегда заранѣе указанъ элементами симметріи. Въ системѣ триклинической (§ 123), всѣ оси X, Y и Z могутъ быть выбраны произвольно, въ системѣ моноклинической (§ 123), точно также произвольно можно выбрать X и Z. Даже въ такихъ системахъ, какъ гексагональная и квадратная, выборъ нѣкоторыхъ изъ осей (X, Y и U) иногда можетъ быть вполнѣ произволенъ (напр. въ строеніяхъ λ^3 или λ^4).

Точно также въ строеніи вещества триклинической, моноклинической и ромбической системъ (§ 123), нѣтъ никакихъ данныхъ, которыя бы опредѣляли величину кристаллическихъ осей; а въ системахъ квадратной и гексагональной отношенія боковыхъ осей и вертикальной также могутъ колебаться въ широкихъ предѣлахъ.

Во всѣхъ такихъ случаяхъ, когда положеніе координатныхъ осей не вытекаетъ изъ наличныхъ элементовъ симметріи, мы выбираемъ за оси какія нибудь ребра (*оси зонъ*), существующіе въ кристаллическомъ поліэдрѣ; когда же нѣтъ никакой опредѣленности въ величинѣ кристаллическихъ осей мы принимаемъ за нихъ параметры какой нибудь пирамиды $\{hkl\}$ (въ системахъ моноклинической, триклинической и ромбической), $\{hhl\}$ (въ квадратной с.) или доматической формы $\{h0\bar{h}l\}$ въ гексагональной системѣ.

260. Очевидно, во всѣхъ этихъ случаяхъ въ зависимости отъ того или иного выбора координатныхъ осей, индексы плоскостей, простыхъ формъ, осей зонъ будутъ выражаться совершенно различными характеристиками; иногда даже комплексы плоскостей будутъ относиться къ тому или иному изъ отличенныхъ нами ихъ родовъ (т. е. пирамидальныя плоскости могутъ обратиться въ доматическія и т. д.—§ 268).

Точно также характеристики индексовъ будутъ мѣняться и при выборѣ тѣхъ или иныхъ параметровъ за кристаллическія оси.

Поэтому, при самомъ началѣ всѣхъ кристаллографическихъ ра-

ботъ, мы должны убѣдиться, что, 1) та или иная перемѣна системы координатъ (т. е. выборъ координатныхъ осей) и 2) тотъ или иной выборъ основной плоскости (т. е. кристаллическихъ осей) не вліяетъ на сохраненіе въ тѣлѣ всѣхъ тѣхъ геометрическихъ законностей, съ которыми мы имѣли дѣло раньше.

Равнымъ образомъ при самомъ началѣ нашей работы передъ нами стоитъ вопросъ о томъ, нельзя ли найти какихъ нибудь неизмѣнныхъ и точныхъ условій выбора системъ координатныхъ осей и основной плоскости въ тѣхъ случаяхъ, когда симметрія перестаетъ служить для этого руководящею нитію. Случайно или не случайно выбираются эти основные элементы кристаллическихъ системъ? Можно ли найти среди множества ячеекъ, получаемыхъ такимъ путемъ для каждаго химическаго соединенія, одну, которая бы давала наиболѣе точное представленіе о его молекулярномъ строеніи, т. е. выражала бы всѣ геометрическія свойства тѣла наиболѣе просто?

261. Всѣ эти вопросы невольно стали передъ первыми изслѣдователями кристаллографіи. Очень долго пытались относить всѣ системы къ взаимноперпендикулярнымъ координатнымъ осямъ, т. к. съ геометрической точки зрѣнія большинство задачъ рѣшалось этимъ путемъ проще и легче. Однако, при этомъ исчезаютъ правильности симметріи и въ 1826 г. Купфферъ показалъ, что законъ параметровъ сохраняется неизмѣннымъ только въ томъ случаѣ, если за координатныя оси берутся дѣйствительно существующія ребра (=оси зонъ) кристалла, причемъ — въ этихъ предѣлахъ—перемѣна координатъ не отражается на законѣ параметровъ. Плоскости получаютъ иногда другія характеристики индексовъ, но эти характеристики остаются простыми и цѣлыми числами.

Нѣтъ надобности теперь доказывать это положеніе. Оно само собою вытекаетъ изъ основныхъ правильностей кристаллическаго многогранника: какъ въ законѣ параметровъ (§ 169 сл.), такъ и въ ангармоническомъ отношеніи пучка векторовъ (§ 173), въ гармоничности отрѣзковъ (§ 188 сл.) мы исходили изъ соображеній, касающихся *всѣхъ* реберъ (осей зонъ) кристалла и, слѣдовательно, характеръ явленія не можетъ измѣниться, какія бы ребра мы ни взяли за исходныя. Отрѣзки на ребрахъ того же кристалла всѣхъ кристаллическихъ плоскостей всегда будутъ давать простыя и раціональныя числа, выражаться одною и тою же простою прогрессіей (§ 195).

Очевидно, всѣ эти законности остаются неизмѣнными и въ томъ случаѣ, когда мы вмѣсто одной основной формы возьмемъ за исходную другую. Здѣсь направленія осей зонъ, взятыхъ за координатныя оси сохраняются неизмѣнными—а слѣдовательно не мѣняются взаимныя отношенія отрѣзковъ, по нимъ отсчитываемыхъ.

262. Однако, хотя законъ Гаюи остается при этомъ неизмѣннымъ, онъ все же получаетъ разное выраженіе. Въ кристаллическомъ многогранникѣ наблюдается безчисленное множество *возможныхъ* (§ 254) реберъ, но только нѣкоторыя изъ нихъ дадутъ простыя выраженія характеристикамъ плоскостей, если ихъ принять за координатныя оси; въ другихъ случаяхъ получатся для характеристикъ хотя и цѣлыя числа, но относительно большія.

При выборѣ координатныхъ и кристаллическихъ осей до сихъ поръ идутъ эмпирически; повидимому, однако, этотъ эмпирически выбранный путь является единственно правильнымъ. Берутъ въ огромномъ большинствѣ случаевъ за оси лишь тѣ ребра многогранника, которыя дѣйствительно въ немъ наблюдаются и являются наиболѣе *обычными*. Характеристики т. о. выбранныхъ координатныхъ и основныхъ плоскостей, конечно будутъ равны 0 или 1 (§ 157, 165). При этомъ оказывается, что характеристики всѣхъ другихъ наблюдаемыхъ плоскостей рѣдко когда превышаютъ ± 3 (§ 188). Можно дать этому объясненіе съ точки зрѣнія векторіальной структуры, ибо выбирая наиболѣе обычныя плоскости за исходныя, мы выбираемъ, въ дѣйствительности, плоскости, связанныя съ наибольшими векторами, а всѣ другія плоскости являются результатомъ ихъ сложенія (§ 193 сл.). Однако, этотъ пріемъ имѣетъ извѣстныя ограниченія. Нерѣдко плоскости, являющіяся результатомъ сложенія максимальныхъ силовыхъ векторовъ выражены слабѣе другихъ плоскостей, которыя являются слѣдствіемъ вліянія поверхностнаго слоя кристалла, его поверхностнаго натяженія (см. ниже главу о кристаллизаціи). Въ такихъ случаяхъ принятіе во вниманіе наиболѣе обычныхъ и сильно развитыхъ плоскостей приводитъ иногда къ сложнымъ индексамъ.

Наконецъ, иногда совсѣмъ нельзя съ увѣренностью рѣшить, какая изъ наблюдаемыхъ плоскостей наиболѣе обычна и лучше выражена. Тогда пользуются для выбора осей или геометрическими соображеніями, которыя привели бы къ наиболѣе простому выра-

женію индексовъ всѣхъ наблюдаемыхъ въ тѣлѣ плоскостей — т. е. дали бы для нихъ наименьшія характеристики. Или же ставятъ кристаллъ по формѣ изоморфнаго съ нимъ соединенія, координатныя и кристаллическія оси котораго могутъ быть правильно выбраны.

Какъ видимъ, задача эта иногда трудная. И до сихъ поръ есть очень много веществъ, въ которыхъ оси выбраны довольно случайно, и которые даютъ намъ, вслѣдствіе этого, неправильныя представленія о формѣ ячейки или даютъ болѣе сложныя характеристики для наблюдаемыхъ плоскостей, чѣмъ какія вытекаютъ изъ его геометрической структуры.

263. Выбравъ такъ или иначе координатныя и кристаллическія оси, надо дать ихъ величину и наклонъ, т. е. α, β, γ и a, b, c (§ 122)—въ тѣхъ случаяхъ когда эти величины не даны симметріей. Для этого надо ихъ вычислить, исходя изъ граныхъ угловъ, которые получаются измѣреніемъ.

Пріемъ такихъ вычисленій варіируетъ отъ одного случая къ другому и подробное ихъ разсмотрѣніе составляетъ предметъ вычислительной кристаллографіи. Для примѣра я остановлюсь здѣсь на одномъ-двухъ общихъ, простыхъ случаяхъ.

Положимъ мы имѣемъ какое нибудь тѣло гексагональной системы. Въ ней какъ мы знаемъ (§ 126) углы между боковыми координатными осями=120°, а уголъ ихъ съ вертикальной=90°—т. е. эти элементы даны симметріей. Боковыя оси равны; слѣдовательно необходимо опредѣлить только отношеніе осей $a:c$. Для этого вполнѣ достаточно измѣрить одинъ гранный уголъ (0001):(1121); когда же этотъ уголъ неизмѣренъ, можно всегда его найти, рѣшая сферическіе треугольники въ проекціи гексагональнаго кристалла. Плоскость (1121) (при отношеніи осей $a:c$) пересѣкаетъ оси X и Y на разстояніи равномъ a, а U на разстояніи равномъ $\frac{a}{2}$. Ось Z она также пересѣкаетъ, но на разстояніи равномъ c. Если мы возьмемъ сѣченіе проходящее черезъ Z, U и перпендикуляръ къ плоскости (1121), то получимъ (рис. 72) прямоугольный треугольникъ AOC, катеты котораго равны $\frac{a}{2}$ и c. Рѣшивъ этотъ треугольникъ, зная гранный уголъ φ между (0001) (перпендикулярная плоскость къ Z, т. е. параллельная сторонѣ OA) и (1121)—мы получимъ отношеніе

$\frac{a}{c}$. Уголъ между перпендикуляромъ къ $(11\bar{2}1)$ и осью U (сторона OA)$=90^0-\varphi$.

Точно также измѣреніе одного угла $(001):(101)$ достаточно, чтобы найти $a:c$ квадратной системы.

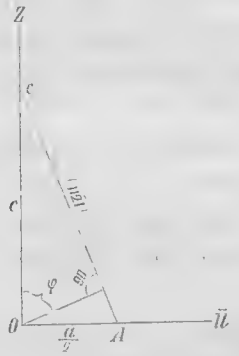


Рис. 72.

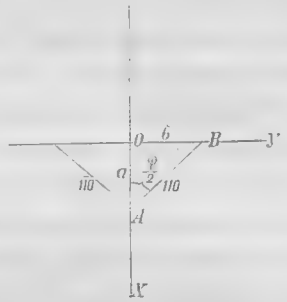


Рис. 73.

264. Въ другихъ системахъ необходимо измѣрить для полученія размѣровъ ячейки больше одного угла. Напр. въ ромбической (§ 123), $\alpha=\beta=\gamma=90^0$, т. е. ячейка прямоугольная, но кристаллическія оси всѣ различныя, т. е. $a:b:c$.

Для того, чтобы получить эти величины, необходимо измѣрить углы между доматическими или призматическими плоскостями или, если они не могутъ быть получены измѣреніемъ, перейти къ нимъ, вычисляя сферическіе треугольники, построенные изъ иныхъ измѣренныхъ гранныхъ угловъ.

Напримѣръ $(110):(1\bar{1}0)=\varphi$ даетъ намъ отношеніе $a:b$, ибо мы получаемъ (рис. 73) этимъ путемъ прямоугольный треугольникъ AOB, въ которомъ два катета равны a и b, а одинъ изъ боковыхъ угловъ $\frac{\varphi}{2}$; рѣшая его имѣемъ:

$$tg\frac{\varphi}{2}=\frac{a}{b}$$

Точно также уголъ $(101):(\bar{1}01)=\chi$ или $(0\bar{1}1):(011)=\psi$ даетъ намъ аналогичныя формулы для $tg\frac{\chi}{2}=\frac{a}{c}$ и $tg\frac{\psi}{c}=\frac{b}{c}$. Отсюда мы

легко получимъ $a:b:c$ или какъ обыкновенно пишутъ: $\frac{a}{b} : 1 : \frac{c}{b}$.

265. Совершенно аналогично, только болѣе сложнымъ путемъ, можно вычислить форму ячейки для триклиническаго или моноклиническаго кристалла. Въ нихъ мы имѣемъ иногда дѣло съ косыми треугольниками и необходимо кромѣ $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ еще найти α, β и γ. Я не буду касаться здѣсь пріемовъ такого изслѣдованія; они будутъ разсмотрѣны въ главѣ о вычислительной кристаллографіи.

Но необходимо обратить вниманіе еще на одно явленіе. Отношеніе кристаллическихъ осей, которое получается путемъ рѣшенія такихъ треугольниковъ, никогда не даетъ простыхъ и цѣлыхъ чиселъ; оно всегда является *ирраціональной величиной* и обыкновенно выражается въ видѣ безконечной дроби.

Это зависитъ отъ того, что векторы, по которымъ измѣряются кристаллическія оси *различны* по своей физической природѣ и не могутъ быть сравниваемы между собою по отношенію къ какимъ нибудь физическимъ явленіямъ. При измѣреніи гранныхъ угловъ они получаютъ длину, соотвѣтствующую температурѣ, при какой производится измѣреніе, но законъ измѣненія ихъ отъ температуры различенъ для каждаго вектора и не имѣетъ ничего общаго съ тѣмъ же закономъ для другаго вектора. Въ результатѣ такого свойства кристалловъ получаются несоизмѣримые отрѣзки плоскости по двумъ такимъ векторамъ, ибо эти отрѣзки получаются путемъ вычисленія гранныхъ улловъ (§ 263), которые зависятъ отъ одновременнаго расширенія кристалла по обоимъ независимымъ векторамъ.

266. Триклиническая система. Къ этой системѣ относятся два строенія (класса) : 1) голоэдрія—*c* и 2) геміэдрія—нѣтъ элементовъ симметріи.

Всѣ тѣла этой системы отличаются тѣмъ, что въ нихъ всѣ зоны косыя (§ 252). Векторы въ геміэдріи триклинической системы всегда полярны и кромѣ того, обладаютъ посолоннымъ или противусолоннымъ характеромъ. Вслѣдствіе этого, въ этомъ строеніи каждое направленіе можетъ отличаться по своимъ свойствамъ отъ всякаго другого направленія. Мы имѣемъ здѣсь какъ бы наиболѣе простой случай твердой матеріи, составленной изъ независимыхъ силовыхъ

линій. По каждой линіи мы можемъ различить 4 разныхъ по физическимъ свойствамъ направленія (§ 206).

Въ голоэдріи, обратно каждая линія въ тѣлѣ можетъ обладать только одними свойствами, по какому бы направленію мы ее ни изслѣдовали (§ 205)—но разныя линіи въ тѣлѣ различны по своимъ свойствамъ.

Кристаллическая ячейка въ обоихъ строеніяхъ представляетъ косой параллелепипедъ, въ которомъ какъ углы α, β, γ — такъ и $a:b:c$ (§ 122) мѣняются для каждаго химическаго соединенія и для каждой температуры или другихъ измѣненій среды, въ которой находится данное тѣло.

267. Оба строенія различаются другъ отъ друга только по количеству плоскостей, входящихъ въ ихъ простыя формы, т. е. по характеру своихъ векторовъ (§ 266). При этомъ въ симметріи геміэдріи нѣтъ никакой причины, которая бы вызвала какую нибудь связь между какими нибудь двумя плоскостями многогранника, слѣдовательно каждая ея плоскость независима отъ другой плоскости и сама по себѣ составляетъ простую форму. *Такимъ образомъ въ геміэдріи триклинической системы каждая простая форма состоитъ изъ одной плоскости.*

Въ голоэдріи триклинической системы имѣется *центръ симметріи*; слѣдовательно (§ 98) каждая плоскость должна имѣть себѣ параллельную. Другихъ элементовъ симметріи (т. е. причинъ связи между плоскостями поліэдра) нѣтъ, а потому *каждая простая форма голоэдріи состоитъ изъ пары параллельныхъ плоскостей.*

Никогда при этихъ условіяхъ, замкнутый многогранникъ не можетъ состоять изъ одной простой формы, т. е. *всѣ простыя формы триклинической системы открытыя* (§ 182).

268. Простыя формы различаются по своему положенію по отношенію къ координатнымъ осямъ—а т. к. послѣднія выбираются болѣе или менѣе произвольно (§ 262), то, въ зависимости отъ того или иного выбора координатныхъ осей, одна и таже простая форма можетъ быть какъ пирамидой, такъ призмой, домой или пинакоидомъ (§ 157). Слѣдовательно, въ сущности въ *триклинической системѣ всѣ простыя формы равнозначны* и могутъ—по нашему желанію—получить тотъ или иной индексъ или названіе.

Однако, для большинства веществъ уже выбрана опредѣленная

система координатныхъ осей и нельзя ее мѣнять произвольно. Но сверхъ того, исходя изъ явленій, не связанныхъ прямо съ симметріей, но зависящихъ отъ закона Гаюи, можно дать общія руководящія начала для правильнаго выбора координатныхъ осей для всѣхъ тѣлъ триклинической системы (§ 263). Поэтому, въ общемъ установка кристалла мѣняется гораздо менѣе, чѣмъ можно было бы ожидать при отсутствіи элементовъ симметріи и слѣдовательно даже и для тѣлъ этой системы индексы плоскостей рѣдко могутъ рѣзко мѣняться.

Мы имѣемъ здѣсь для обоихъ строеній триклинической системы слѣдующую таблицу простыхъ формъ:

	Количество плоскостей. Геміэдріи.	Голоэдріи.	Названіе простой формы.	Названіе Науманна (Кокшарова).	Названіе Грота. (Федорова).
$\{hkl\}$ ...	1	2	Пирамида	Тетартопирамида	Пинакоидъ 4-го рода [1])
$\{hk0\}$ ...	1	2	Призма	Гемипризма	„ 3-го „ [1])
$\{h0l\}$ ...	1	2	Домы	Макродома	„ 2-го „ [1])
$\{0kl\}$ ...	1	2		Брахидома	„ 1-го „ [1])
$\{100\}$ ...	1	2	Боковые пинакоиды	Макропинакоидъ	Первый пинакоидъ [2])
$\{100\}$ ...	1	2		Брахипинакоидъ	Второй „ [2])
$\{001\}$ ...	1	2	Базопинакоидъ	Базопинакоидъ	Третій „ [2])

269. Пирамиды и другія простыя формы могутъ различаться какъ по числовымъ величинамъ характеристикъ, такъ и по ихъ знакамъ. На основаніи послѣдняго можно различать *роды* простыхъ формъ, которыя указываютъ на простыя формы, плоскости которыхъ лежатъ въ различныхъ октантахъ. Такъ напр. для *пирамидъ* мы имѣемъ въ геміэдріи 8 различныхъ родовъ: $\{hkl\}$, $\{hk\bar{l}\}$, $\{h\bar{k}l\}$, $\{\bar{h}kl\}$, $\{h\bar{k}\bar{l}\}$, $\{\bar{h}k\bar{l}\}$, $\{\bar{h}\bar{k}l\}$, $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$ — а для голоэдріи всего четыре [3]): $\{hkl\}$, $\{\dot{h}\dot{k}l\}$, $\{\dot{h}k\dot{l}\}$, $\{h\dot{k}\dot{l}\}$. Для призмъ и домъ—въ геміэдріи наблюдается 4 разныхъ рода, въ голоэдріи 2, для пинакоидовъ въ геміэдріи 2—въ голоэдріи всего 1.

Кромѣ того можно для простыхъ формахъ различать случаи, когда

---

[1]) Въ геміэдріи соотвѣтственно недіоны 1-го, 2-го, 3-го и 4-го родовъ.

[2]) Въ геміэдріи соотвѣтственно: первый, второй и третій недіоны.

[3]) Такъ какъ параллельныя между собою плоскости принадлежатъ къ одной простой формѣ (§ 267), слѣд. $\{hkl\} = \{\dot{h}\dot{k}\dot{l}\}$, $\{h\bar{k}l\} = \{\dot{h}k\dot{l}\}$ и т. д.

ихъ можетъ быть много одного и того же рода или когда каждый родъ заключаетъ всего одну форму. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы называемъ такую форму *единственной въ своемъ родѣ* — таковы, напримѣръ, пинакоиды.

Конечно, для триклинической системы это опредѣленіе имѣетъ чисто формальное значеніе, ибо въ ней выборъ координатныхъ плоскостей, т. е. пинакоидовъ (§ 157)—болѣе или менѣе произволенъ и симметрія дозволяетъ выбрать всякую ея плоскость за пинакоидъ.

270. Въ геміэдріи триклинической системы можетъ наблюдаться еще одно различіе—посолонныхъ и противусолонныхъ простыхъ формъ (§ 217)—связанное съ характеромъ ея векторовъ. Къ сожалѣнію, физическія явленія этого строенія крайне мало изучены. Во всякомъ случаѣ принявъ для правой разности вещества существованіе {001}, {010} и {100}—мы должны для лѣвой допустить бо́льшую силу для противоположнаго полярнаго вектора—т. е. большую устойчивость {001}, {010} и {100}. Соотвѣтственно съ этимъ, если для правой разности появится {111}, то для лѣвой долженъ развиться {111} и т. д.—т. е. *параллельныя простыя формы должны принадлежать къ разнымъ физическимъ изомерамъ вещества.* Ихъ комбинаціи дадутъ соотвѣтственно энатіоморфные многогранники. До сихъ поръ, однако, не изучено ни одного случая поліэдровъ разнаго типа для обоихъ оптическихъ изомеровъ. Отчасти это объясняется трудностію изслѣдованія такихъ веществъ, которыя не даютъ намъ никакихъ неизмѣнныхъ точекъ опоры для оріентировки поліэдра.

271. До сихъ поръ съ точностію констатировано очень мало веществъ геміэдріи и очень много голоэдрическихъ формъ. Однако, очень вѣроятно, что многія голоэдрическія вещества при ближайшемъ изученіи окажутся геміэдричными, ибо благодаря зональному виду поліэдра, въ кристаллахъ обыкновенно появляются параллельныя плоскости и различіе многогранниковъ обоихъ строеній сводится не на ихъ исчезаніе, а на ихъ неодинаковое развитіе (§ 183).

Кристаллы голоэдріи наблюдались уже очень давно, они были описаны уже первыми кристаллографами и Бернгарди (1808) правильно выдѣлилъ ихъ въ особую группу. Долгое время однако голоэдрическія формы триклинической системы относились и Вейссомъ и Мосомъ (§ 121) къ геміэдріи ромбической сист.,—но лишь послѣ ра-

ботъ Купффера, указавшаго на необходимость (§ 261) избранія косыхъ осей, — триклиническая система была окончательно выдѣлена въ особую систему.

Еще медленнѣе шло признаніе геміэдріи. Теоретически ея существованіе было выведено Гесселемъ (1830), но какъ не разъ было указано (§ 29) не было признано. Первыя относящіяся сюда случаи были описаны Цефаровичемъ въ 1860 году, не придавшимъ правильнаго толкованія наблюдавшемуся имъ явленію отсутствія параллелизма плоскостей въ комбинаціяхъ кристалловъ уксусно-азотно-кислаго стронція—$Sr_2\ (C_2H_3O_2)_2\ (NO_3)_2 \cdot 3H_2O$. Черезъ немного лѣтъ, въ 1863 г., А. Скакки на виннокислыхъ соляхъ стронція точно и ясно описалъ геміэдрію триклинической системы, но его наблюденія, какъ противорѣчащія господствующимъ взглядамъ, были оставлены безъ вниманія. Лишь въ 1880—1890-хъ годахъ эти наблюденія Скакки были признаны, подтверждены еще на нѣкоторыхъ примѣрахъ и окончательно вошли въ научное сознаніе.

272. Въ веществахъ триклинической системы мы наблюдаемъ б. ч. немного простыхъ формъ и многогранники, ими богатые, составляютъ исключеніе. Какъ примѣръ поліэдровъ этой системы можно привести, напр., слѣдующія комбинаціи. Для геміэдріи: рис. 74—*анортитъ* изъ

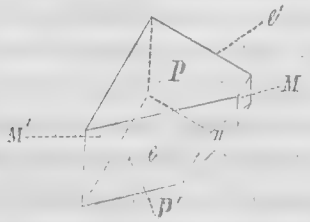


Рис. 74.

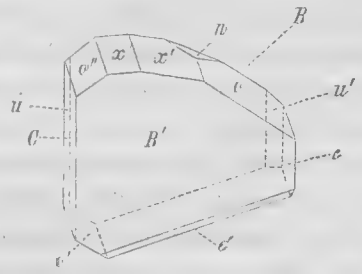


Рис. 75.

Оріерви въ Финляндіи (линдсэитъ) по Вінку (1883), комбинація [1]) P {001}, P' {00$\bar{1}$}, M {010}, M' {0$\bar{1}$0}, l {110}, l' {1$\bar{1}$0},

[1]) Надо имѣть въ виду, что для удобства каждая простая форма тѣла получаетъ еще *буквенное* обозначеніе, которое всегда выдерживается неизмѣнно; всякій открывающій новую форму даетъ ей не мѣняющееся позже буквенное обозначеніе по своему произволу. Въ анортитѣ, напр., P всегда будетъ обозначать {001} и т. д. Для работы съ какимъ нибудь веществомъ при измѣреніяхъ, рисункахъ и т. п., буквенное обозначеніе очень удобно.

$n\ \{02\bar{1}\}$—при чемъ $a:b:c=0.6347:1:0.5500$, $\alpha=93^\circ13\frac{1}{2}$, $\beta=115^\circ55\frac{1}{2}$, $\gamma=91^\circ11\frac{1}{2}$ (Марпньякъ 1862). Рис. 75—*виннокислый стронцій*—$SrH_2(C_4H_4O_6)_2.2H_2O$—по А. Скакки (1863), комбинація $B\ \{\bar{1}00\}$, $B'\ \{100\}$, $C\ \{010\}$, C', $\{010\}$, $u\ \{1\bar{1}0\}$, $u'\ \{\bar{1}10\}$, $o\ \{011\}$, $o''\ \{011\}$, $e'\ \{10\bar{1}\}$, $n\ \{\bar{3}14\}$, $o''\ \{011\}$, $x\ \{013\}$, $x'\ \{012\}$, при чемъ $a:b:c=1.0404:1:1.1375$, $\alpha=89^\circ18'$, $\beta=108^\circ48'$ и $\gamma=64^\circ33'$. Огромное большинство комбинацій тѣлъ этого строенія, повидимому, крайне приближается къ голоэдріи и параллельныя плоскости отличаются только размѣрами и физическими свойствами. Это, напр., мы имѣемъ

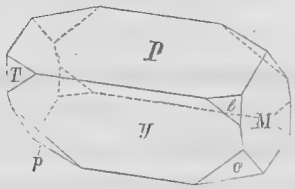


Рис. 76.

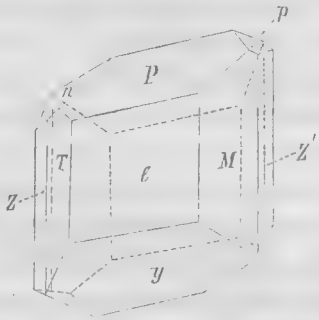


Рис. 77.

для анортита, большинство комбинацій котораго вычерченныя согласно закону Стенона (§ 150), не даетъ намъ отличія отъ голоэдрическихъ многогранниковъ, напр., рис. 76—анортитъ изъ Песмеды по Г. фомъ Рату (1875), гдѣ всѣ плоскости имѣютъ себѣ параллельныя [1]). Въ такихъ кристаллахъ, вопросъ о ихъ строеніи (классѣ) можетъ быть рѣшенъ только изученіемъ физическихъ свойствъ.

273. Голоэдрическія комбинаціи отличаются отъ геміэдрическихъ только тѣмъ, что каждая изъ ихъ плоскостей имѣетъ себѣ параллельную. Въ настоящее время къ этому строенію должны быть отнесены тысячи веществъ и оно очень обычно среди многочисленныхъ органическихъ соединеній. Какъ примѣры комбинацій, можно привести—рис. 77—*альбитъ* изъ Кыштымскаго мѣсторожденія на Уралѣ по С. Ф. Глинка (1889), комбинаціи $P\ \{001\}$, $l\ \{110\}$, $T\ \{1\bar{1}0\}$, $M\ \{010\}$, $z\ \{1\bar{3}0\}$, $z'\ \{1\bar{5}0\}$, $y\ \{\bar{2}01\}$, $n\ \{021\}$, $p\ \{111\}$,

---

[1]) Буквенныя обозначенія въ этомъ кристаллѣ тѣ же, что и въ рис. 74; сверхъ того $T=\{1\bar{1}0\}$, $p=\{\bar{1}\bar{1}1\}$, $o=\{11\bar{1}\}$, $y=\{20\bar{1}\}$.

при чемъ a: b: c=0.6335: 1:0.5577, α=94°3′, β=116°29′, γ=88°9′ по Деклуазо (1862); рис. 78—*аксинитъ* изъ Волкъ-острова, на Онежскомъ озерѣ по Шрауфу (1870), комбинація—c {001}, s {101}, l {112}, u {111}, p {1$\bar{1}$1}, x {201}, a {100}, M {110}, m {1$\bar{1}$0}, e {1$\bar{1}\bar{1}$}—при чемъ a: b: c=1.1475: 1:0.8626, α=97°2′, β=98°53′, 5 и γ=102°45′ по Г. ф. Рату (1866) и Шрауфу (1870); рис. 79—

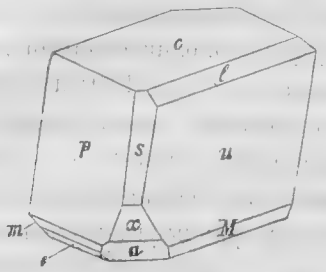


Рис. 78.

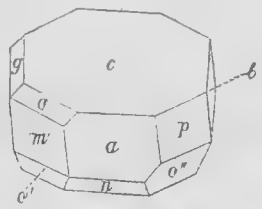


Рис. 79.

фтористый цирконій $Zr F_4 . 3H_2O$, по Мариньяку (1843), комбинація изъ c {001}, a {100}, p {110}, m {1$\bar{1}$0}, b {010}, g {0$\bar{2}$1}, o {1$\bar{1}$1}, o' {$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$}, o'' {11$\bar{1}$} и n {20$\bar{1}$}, при чемъ a: b: c=0.7638: 1:0.6389, α=104°47′, β=110°59 и γ=103°53′. Въ очень многихъ комбинаціяхъ триклинической системы форма поліэдра чрезвычайно приближается къ моноклинической системѣ и многогранники могутъ быть отличены отъ этой послѣдней только путемъ точныхъ измѣреній.

274. Въ триклинической системѣ всѣ ея элементы, т. е. вся форма ея ячейки (§ 123), должна быть найдена вычисленіемъ изъ величинъ гранныхъ угловъ, полученныхъ путемъ измѣренія на гоніометрахъ (см. ниже). Мы уже видѣли, какъ получаются изъ гранныхъ угловъ величины кристаллическихъ осей (§ 263 сл.), но въ этой системѣ должны быть вычислены и углы между ними — α, β, γ, измѣняющіеся для каждаго химическаго соединенія и при разныхъ внѣшнихъ физическихъ условіяхъ.

Углы α, β, γ образованы координатными осями X, $У$, Z (§ 122); плоскости, проходящія черезъ эти оси, т. е. координатныя плоскости, будутъ пинакоидами (001), (010) и (100) (§ 157). Углы между ребрами этихъ пинакоидовъ будутъ α, β, γ. Гранные углы между пинакоидами могутъ быть измѣрены; а за ихъ грани могутъ быть приняты три наиболѣе обычныя плоскости въ многогранникахъ даннаго химическаго соединенія (§ 262). Однако, гранные углы

между пинакоидами не равны углам между ихъ ребрами, ибо ихъ плоскости наклонны другъ къ другу, а гранные углы измѣряются на плоскости, перпендикулярной къ гранному ребру (§ 84). Если мы имѣемъ проекцію какого-нибудь триклиническаго кристалла (рис. 80), то мы получимъ на ней сферическій треугольникъ, образованный полюсами (001), (010) и (100). Стороны этого треугольника будутъ дополнительными до гранныхъ угловъ (§ 149) и получаются измѣреніемъ на гоніометрѣ, а углы его будутъ углами α, β, γ—такъ какъ углы сферическихъ треугольниковъ равны угламъ между зонами (resp. осями зонъ = ребрами, § 237) [1]). Поэтому мы получимъ α, β, γ—рѣшивъ косой сферическій треугольника, стороны котораго даны измѣреніемъ. Очень часто, поэтому, вмѣсто α, β и γ даютъ въ триклиническомъ кристаллѣ прямо углы между пинакоидами: A=(001): (010), B=(100): (001) и C=(010): (100).

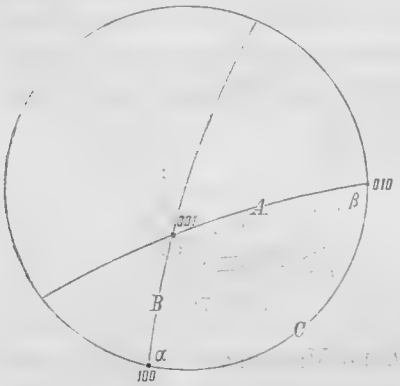


Рис. 80.

275. Моноклиническая система. Къ моноклинической системѣ относятся уже три строенія (класса) (§ 127), характеризующіяся слѣдующими символами: 1) голоэдрія—$\lambda^2 c \pi$, 2) λ^2 и 3) π.

Многогранники этой системы уже обладаютъ *ортогональными зонами* (§ 257). Таковы зоны, оси которыхъ перпендикулярны къ оси $У$ (=λ^2, если эта послѣдняя существуетъ въ данномъ строеніи) или лежатъ въ плоскости XZ т. е. въ (010) (совпадающей съ π, если послѣдняя имѣется въ строеніи). Въ каждой изъ этихъ зонъ пріобрѣтаютъ особое значеніе тѣ двѣ плоскости, которыя всегда

---

[1]) Собственно говоря мы получимъ дополнительные до 180° углы къ α, β и γ, такъ какъ исходныя стороны сферическаго треугольника равны дополненію къ 180° отъ граннаго угла. Но, очевидно, совершенно безразлично, какія брать величины—прямыя или дополнительныя до 180°—для того, чтобы выразить уголъ, дѣлаемый двумя прямыми. Обыкновенно, ставятъ кристалъ такъ, что β выражаетъ тупой уголъ и соотвѣтствуетъ углу XOZ, а не $\overline{X}OZ$.

взаимоперпендикулярны (§ 257). Одна изъ нихъ особенно важна, такъ какъ она входитъ во всѣ ортогональныя зоны моноклинической системы; это, очевидно, плоскость перпендикулярная къ Y или параллельная XZ т. е. пинакоидъ $\{010\}$ или $\{0\bar{1}0\}$ (§ 157). Такимъ образомъ въ моноклиническихъ кристаллахъ мы имѣемъ три рода плоскостей: 1) плоскости (010) и $(0\bar{1}0)$, которыя входятъ во всѣ мыслимыя ортогональныя зоны кристалла и которыя перпендикулярны къ единственной въ моноклинической системѣ L^2 или параллельны единственной плоскости симметріи, 2) плоскости, входящія въ ортогональныя зоны и дѣлающія 90^0 съ (010), всегда параллельныя къ L^2 или перпендикулярныя къ P и 3) плоскости, которыя образуютъ косыя зоны, или, входя въ ортогональныя зоны, не перпендикулярны къ другимъ плоскостямъ этой зоны.

276. Эти три рода плоскостей рѣзко выдѣляются и въ характерѣ простыхъ формъ моноклинической системы, ибо онѣ правильно расположены по отношенію къ оси Y; а всѣ геометрическія свойства этой системы обусловливаются свойствами этой оси, которая совпадаетъ съ λ^2 или перпендикулярна къ π (§ 123). Очевидно, эта ось должна наиболѣе рѣзко характеризовать симметрію многогранника. Двѣ другія оси X и Z выбираются произвольно, изъ числа двухъ наиболѣе обычныхъ плоскостей второго рода (§ 275), дѣлающихъ между собою уголъ β, сильно колеблящійся въ различныхъ химическихъ соединеніяхъ, при разныхъ внѣшнихъ условіяхъ. Такимъ образомъ ячейка моноклинической системы образована тремя осями, причемъ $\alpha=\gamma=90^0$. Всѣ кристаллическія оси различны, ибо оси X, Y и Z ничѣмъ не связаны другъ съ другомъ.

Кристаллъ моноклинической системы характеризуется тремя перемѣнными: во 1-хъ) угломъ β, который получается простымъ измѣреніемъ угла между (001) и (100) (за которыя принимаются двѣ наиболѣе обычныя и развитыя плоскости изъ зоны Y); если же этихъ плоскостей нѣтъ, то уголъ β вычисляется изъ другихъ гранныхъ угловъ;—и во 2-хъ отношеніемъ кристаллическихъ осей $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, которыя получаются вычисленіемъ изъ гранныхъ угловъ, аналогично указаннымъ въ §§ 263, 264 случаямъ.

277. Простыя формы состоятъ изъ плоскостей, различно расположенныхъ по отношенію къ координатнымъ осямъ, при чемъ до-

извѣстныхъ предѣловъ, въ зависимости отъ разнаго выбора осей X, Y, Z, онѣ могутъ мѣнять свое названіе. Однако въ отличіе отъ триклинической системы, гдѣ всѣ формы могли мѣнять свои названія и свое положеніе по отношенію къ координатнымъ осямъ, здѣсь положеніе нѣкоторыхъ простыхъ формъ вполнѣ или отчасти неизмѣнно, такъ какъ ось Y и углы α и γ не зависятъ отъ воли наблюдателя.

Согласно съ этимъ и вполнѣ соотвѣтственно съ родами плоскостей, указанныхъ въ § 275, мы имѣемъ:

1) Простыя формы, грани которыхъ перпендикулярны къ λ^2— т. е. $\{010\}$ или $\{0\bar{1}0\}$. Это плоскости 1-го рода, входящія во всѣ ортогональные пояса.

2) Простыя формы, грани которыхъ параллельны Y т. е. формы, образованныя гранями 2-го рода. Очевидно можетъ быть три случая такихъ граней: a) пересѣкаютъ X и Z — напр. $\{h0l\}$ или $\{\bar{h}0l\}$, b) параллельны Z, но пересѣкаютъ X—$\{100\}$ или $\{\bar{1}00\}$, и c) параллельны X, но пересѣкаютъ Z—$\{001\}$ или $\{00\bar{1}\}$. Такимъ образомъ сюда входятъ доматическія и пинакоидальныя плоскости. Очевидно, въ зависимости отъ выбора X и Z — довольно произвольнаго — всѣ эти грани переходятъ одна въ другую—т. е. $(h0l)$ при одномъ выборѣ осей X и Z можетъ стать (100) или (001) при другомъ ихъ выборѣ и т. д. Поэтому различіе въ индексахъ этихъ плоскостей имѣетъ иное значеніе, чѣмъ отличіе ихъ отъ простыхъ формъ 1-ой или 3-ей группы.

3) Простыя формы, грани которыхъ пересѣкаютъ Y. Очевидно и здѣсь, въ зависимости отъ выбора осей X и Z, мы имѣемъ или пирамидальныя формы — $\{hkl\}$, $\{\bar{h}kl\}$ или доматическія $\{0kl\}$, или призматическія $\{hk0\}$. Простая перемѣна координатъ X и Z переведетъ ихъ другъ въ друга, но никогда не приведетъ въ индексъ 1-ой или 2-ой группы простыхъ формъ.

278. Различныя строенія моноклинической системы отличаются по количеству плоскостей, входящихъ въ простую форму, при чемъ это количество для простыхъ формъ каждаго рода (§ 277) остается неизмѣннымъ для каждаго строенія (класса).

Для того, чтобы выяснить, какія плоскости въ каждомъ классѣ соединены вмѣстѣ, въ одну простую форму, достаточно изучить ихъ

зависимость отъ различныхъ элементовъ симметріи, существующихъ въ моноклинической системѣ, т. е. отъ λ^2, c и π.

Такъ 1) для (010) λ^2 не вызываетъ связи ея ни съ какой другой плоскостію.

c вызываетъ всегда ей параллельную $(01\bar{0})$

π » » » » »

2) для $(h0l)$ λ^2 » » » » $(\bar{h}0l)$

c » » » » »

π не вызываетъ никакой связи ея съ другими плоскостями.

Очевидно, то же самое будетъ наблюдаться для всѣхъ граней того же рода, т. е. для (100), (001) и $(h0l)$.

3) для (hkl) λ^2 вызываетъ связь ея съ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$

c » » » » ея параллельной $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$

π » » » » $(h\bar{k}\bar{l})$.

Очевидно совершенно аналогичное явленіе будетъ наблюдаться для всѣхъ другихъ граней того же рода, т. е. для $\{0kl\}$, $\{hk0\}$ и т. д. Такъ напр. для $(0kl)$—λ^2 вызоветъ ея связь съ $(0k\bar{l})$, c съ $(0\bar{k}\bar{l})$, а π съ $(0\bar{k}l)$ и т. д.

279. Исходя изъ этихъ соображеній и принимая во вниманіе, какіе изъ элементовъ симметріи находятся въ строеніи, мы легко можемъ возстановить ту форму, которая будетъ получаться благодаря симметріи въ каждомъ многогранникѣ строенія.

Возьмемъ наиболѣе сложный случай — *пирамидальныхъ плоскостей*. Возможно 8 разныхъ родовъ (§ 269) пирамидальныхъ плоскостей *одинаковыхъ характеристикъ*, по числу октантовъ: (hkl), $(\bar{h}kl)$, $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}\bar{k}l)$, $(\bar{h}k\bar{l})$, $(hk\bar{l})$, $(h\bar{k}\bar{l})$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$. Очевидно никакихъ другихъ случаевъ не можетъ быть, разъ только характеристики плоскостей не мѣняются. Если возьмемъ какую нибудь плоскость (hkl), то, на основаніи § 278, мы имѣемъ:

1) въ голоэдріи $\lambda^2 c \pi$: простую форму изъ четырехъ тавтозональныхъ плоскостей—(hkl), (hkl), $(h\bar{k}\bar{l})$ и (hkl) [1]). Полу-

---

[1]) Послѣднюю потому, что къ (hkl) π вызываетъ $(h\bar{k}\bar{l})$, но къ этой *послѣдней* c вызываетъ ей параллельную $(\bar{h}k\bar{l})$, а λ^2 (hkl), которая уже и раньше соединена съ (hkl) (черезъ c).

чается какъ бы четырехгранная призма, наклонно расположенная въ пространствѣ.

2) » строенія λ^2 : простую форму изъ двухъ не параллельныхъ плоскостей: (hkl) и $(\bar{h}kl)$.

3) » » π : простую форму изъ двухъ непараллельныхъ граней (hkl) и $(\bar{h}kl)$—т. е. какъ бы системы двухъ плоскостей пересѣкающихся въ плоскости XZ и безконечно расходящихся въ пространствѣ.

Уже изъ этихъ соображеній мы можемъ сдѣлать нѣсколько довольно важныхъ выводовъ. Такъ, далеко не всѣ пирамидальныя плоскости захватываются въ одну простую форму; даже въ голоэдріи изъ числа 8 возможныхъ случаевъ одинаковыхъ (геометрически) плоскостей захвачено 4, а въ геміэдріяхъ захвачено всего 2 и остается 6 независимыхъ отъ (hkl) пирамидальныхъ граней.

Такія независимыя другъ отъ друга пирамидальныя плоскости принадлежатъ, какъ мы говоримъ, къ *пирамидамъ разнаго рода*, причемъ въ голоэдріи для одинаковыхъ характеристикъ мы имѣемъ два разныхъ рода пирамидъ: $\{hkl\}$ (изъ плоскостей (hkl), $(\bar{h}kl)$, $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}\bar{k}l)$) и
$\{\bar{h}kl\}$ » » (hkl), $(\bar{h}kl)$, $(h\bar{k}l)$, $(hk\bar{l})$), а

для геміэдрій соотвѣтственно 4, именно:

для λ^2 :	1)	$\{hkl\}$ — плоскости	(hkl), $(\bar{h}kl)$
	2)	$\{hkl\}$ — »	$(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}kl)$
	3)	$\{hkl\}$ — »	$(\bar{h}kl)$, (hkl)
	4)	$\{\bar{h}\bar{k}l\}$ — »	$(\bar{h}\bar{k}l)$, $(h\bar{k}\bar{l})$
» π :	1)	$\{hkl\}$ — »	(hkl), $(h\bar{k}l)$
	2)	$\{hk\bar{l}\}$ — »	(hkl), $(\bar{h}kl)$
	3)	$\{\bar{h}kl\}$ — »	(hkl), (hkl)
	4)	$\{hkl\}$ — »	(hkl), (hkl).

Отсюда мы ясно видимъ, что одни и тѣ же индексы простыхъ формъ для разныхъ строеній выражаютъ намъ совсѣмъ разныя понятія (§ 180) и что на основаніи взаимнаго распредѣленія плоскостей въ простыя формы можно различать всѣ строенія одной и той же кристаллической системы.

280. То же самое получимъ и для другихъ простыхъ формъ той же 3-ой группы плоскостей (§ 277), т. е. для доматическихъ и

призматическихъ. Но для нихъ граней съ одинаковыми характеристиками можетъ наблюдаться всего четыре. Здѣсь мы имѣемъ:

для голоэдріи $\lambda^2 c\pi$: I) $\{0kl\}$ изъ $(0kl)$, $(0kl)$, $(0k\bar{l})$, $(0\bar{k}\bar{l})$

II) $\{hk0\}$ » $(hk0)$, $(hk0)$, $(hk0)$, $(\bar{h}k0)$

для λ^2 : I) 1) $\{0kl\}$ » $(0kl)$, $(0kl)$

2) $\{0kl\}$ » $(0kl)$, $(0kl)$

II) 1) $\{hk0\}$ » $(hk0)$, $(hk0)$

2) $\{hk0\}$ » $(hk0)$, $(hk0)$

» π : I) 1) $\{0kl\}$ » $(0kl)$, $(0kl)$

2) $\{0k\bar{l}\}$ » $(0k\bar{l})$, $(0k\bar{l})$

II) 1) $\{hk0\}$ » $(hk0)$, $(hk0)$

2) $\{\bar{h}k0\}$ » $(\bar{h}k0)$, $(\bar{h}\bar{k}0)$

Въ общемъ, слѣдовательно, мы видимъ здѣсь ту же самую картину, какую получили для пирамидальныхъ формъ: для каждаго строенія наблюдается свой законъ соединенія плоскостей въ простую форму, для геміэдрій въ простыхъ формахъ наблюдается *половинное* количество плоскостей по сравненія съ голоэдріей, для нѣкоторыхъ строеній различается нѣсколько *родовъ* простыхъ формъ одинаковыхъ характеристикъ.

281. Появленіе въ нѣкоторыхъ строеніяхъ простыхъ формъ съ *половиннымъ* количествомъ плоскостей обратило на себя давно вниманіе наблюдателей (§ 202) и привело къ выясненію *геміэдрій*. Само названіе нѣкоторыхъ строеній системы геміэдріями произошло отъ этого наблюденія [1]).

Однако, появленіе половиннаго количества плоскостей въ простыхъ формахъ геміэдрическихъ строеній происходитъ далеко не всегда, такъ напр. плоскости 2-го рода (§ 275) даютъ для голоэдріи и для геміэдрическаго строенія — λ^2 — одинаковое количество плоскостей: $\{h0l\}$ въ обоихъ случаяхъ состоитъ изъ пары параллельныхъ плоскостей и т. д. Поэтому, признакъ этотъ не является столь существеннымъ и удобнымъ для характеристики строеній, какъ принимали въ первой половинѣ XIX столѣтія.

Долгое время основываясь на немъ даже выводили всѣ строенія кристаллическихъ системъ, изучая законы различнаго развитія половинъ плоскостей простой формы, но этимъ путемъ получили невѣрное и неполное представленіе о кристаллическихъ классахъ. Поэтому я оставлю совершенно въ сторонѣ такой выводъ геміэдрій изъ голоэдріи. Онъ имѣетъ значеніе простого математическаго пріема изслѣдованія, неполно отвѣчающаго даннымъ опыта.

[1]) Ἡμῖ — половина.

282. Основываясь на симметріи (§ 279—280) возможно вывести слѣдующую таблицу простыхъ формъ всѣхъ кристаллическихъ строеній [1]):

	№ с π		№		π	
I-я группа простыхъ формъ.	{hkl} {h̄kl}	Пирамиды [2]) 4 плоск.	{hkl} {h̄kl}	Правые сфеноиды [6]) 2 пл.	{hkl} {hk̄l}	Пирамиды [9]) 2 пл.
			{hk̄l} {h̄k̄l}	Лѣвые сфеноиды [6]) 2 пл.	{hkl̄} {hk̄l̄}	
	{hk0}	Призмы [3]) 4 пл.	{hk0}	— Правая призма [7]) 2 пл.	{hk0}	Призмы [11]) 2 пл.
			{hk̄0}	— Лѣвая призма [7]) 2 пл.	{hk̄0}	
	{0kl}	Дома [4]) 4пл.	{0kl}	— Правая дома [8]) 2 пл.	{0kl}	Домы [12]) 2 пл.
			{0k̄l}	— Лѣвая дома [8]) 2 пл.	{0kl̄}	
II-я группа простыхъ формъ.	{h0l} {h̄0l}	Ортодомы [5]) 2 пл.	{h0l} {h̄0l}	Ортодомы [10]) 2 пл.	{h0l} {h̄0l}	Ортодомы [13]) 1 пл.
					{h0l̄} {h̄0l̄}	
	{100}	— Пинакоидъ [14]) 2 пл.	{100}	Пинакоидъ [14]) 2 пл.	{100} {1̄00}	Пинакоидъ [18]) 1 пл.
	{001}	— Пинакоидъ [15]) 2 пл.	{001}	Пинакоидъ [15]) 2 пл.	{001} {00 1̄}	Пинакоидъ [19]) 1 пл.
III-я группа простыхъ формъ.	{010}	—Клинопинакоидъ [16]) 2 пл.	{010} {0 1̄0}	Клинопинакоидъ [17]) 1 пл.	{010}	Клинопинакоидъ [16]) 2 пл.

---

[1]) Я привожу въ таблицѣ упрощенныя наименованія. Въ примѣчаніяхъ указаны старыя названія *Н*—Науманнъ (Кокшаровъ)—*Г* (Гротъ-Федоровъ).

[2]) *Н*—гемипирамиды, {h̄kl}—отрицат., {hkl}—положит. *Г*—призма 4-го рода.

[3]) *Н*—призмы, *Г*—призмы 3-го рода.

[4]) *Н*—клинодомы, *Г*—призмы 1-го рода.

[5]) *Н*гемиортодомы, *Г*—призмы 2-го рода.

[6]) *Н*—сфеноиды, *Г*—сфеноиды 4-го рода.

[7]) *Н*—призмы, *Г*—сфеноидъ 3-го рода.

[8]) *Н*—клинодома, *Г*—сфеноидъ 1-го рода.

[9]) *Н*—гемипирамиды, *Г*—дома 4-го рода.

[10]) *Н*—ортодома, *Г*—сфеноидъ 2-го рода.

[11]) *Н*—призма, *Г*—дома 3-го рода.

[12]) *Н*—клинодома, *Г*—дома 1-го рода.

[13]) *Н*—гемиортодома, *Г*—педіонъ 2-го рода.

[14]) *Н*—Ортопинакоидъ, *Г*—пинакоидъ.

[15]) *Н*—Базопинакоидъ, *Г*—третій пинакоидъ.

[16]) *Н*—Клинопинакоидъ, *Г*—второй пинакоидъ.

[17]) *Н*—Клинопинакоидъ, *Г*—правый и лѣвый первый педіонъ.

[18]) *Н*—Ортопинакоидъ, *Г*—первый положительный и отрицательный педіонъ.

[19]) *Н*—Базопинакоидъ, *Г*—третій положительный и отрицательный педіонъ.

283. Въ этомъ перечисленіи мы встрѣчаемъ два строенія принадлежащихъ къ энантіоморфнымъ (строеніе λ^2—§ 215) и гемиморфнымъ классамъ (строеніе π—§ 228).

Взглядъ на таблицу на стр. 226 достаточенъ для того, чтобы оріентироваться въ распредѣленіи формъ строенія λ^2. Правыя и лѣвыя формы [1]) соотвѣтственно попадаютъ въ группы посолонныхъ и противусолонныхъ формъ, при чемъ энантіоморфными являются формы одного рода. Всѣ эти формы гемиморфны (§ 227), такъ какъ каждая плоскость не имѣетъ себѣ параллельной. Надо обратить вниманіе еще на одно свойство векторовъ этого строенія: формы одного индекса могутъ быть *различны* по свойствамъ въ обоихъ разностяхъ—напр. {011} праваго и лѣваго изомера не одинаковы, ибо перпендикулярны одна посолонному, другая противусолонному вектору (ср. § 210). Эти различія мало изучены для моноклинической системы (см. правильн. сист.).

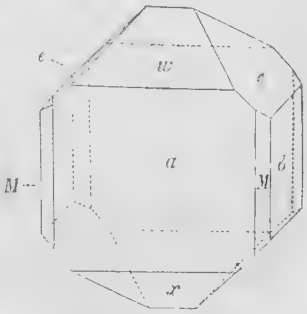


Рис. 81.

Переходя къ строенію π мы видимъ, что одинъ {010} имѣетъ пару параллельныхъ плоскостей, тогда какъ всѣ другія простыя формы состоятъ изъ непараллельныхъ плоскостей, т. е. разные концы перпендикуляровъ къ нимъ обладаютъ разными свойствами съ точки зрѣнія тѣхъ физическихъ явленій, выраженіемъ которыхъ служатъ простыя формы. Поэтому, понятно положеніе этаго класса въ группѣ гемиморфныхъ строеній (§ 228): *всѣ векторы*, кромѣ вектора параллельнаго оси Y, въ немъ *полярны*.

284. Въ этой системѣ всѣ простыя формы открытыя (§ 182), поэтому всѣ ея многогранники представляютъ комбинаціи. Какъ примѣръ комбинацій *голоэдріи* можно напр. привести слѣдующія—рис. 81 — *монацитъ* изъ Ильменскихъ горъ по Н. И. Кокшарову (1862), гдѣ w {101}, a {100}, b {010}, e {011}, x {101}, M {110}, при чемъ $a:b:c=0.9501:1:1.0304$, $\beta=76^{\circ}14'$, рис. 82—*кро-*

---

[1]) Названія правыя и лѣвыя возможно здѣсь сохранить, такъ какъ они вошли въ жизнь благодаря химикамъ и дѣйствительно указываютъ въ *данномъ случаѣ* на установку кристалла.

коитъ ($Pb\ Cr\ O_4$) изъ Березовска на Уралѣ по Кокшарову (1875), гдѣ $c\ \{001\}$, $m\ \{110\}$, $t\ \{111\}$, $y\ \{012\}$, $x\ \{\bar{1}03\}$, $\varphi\ \{113\}$, $u\ \{\bar{1}12\}$, $\beta\ \{\bar{2}13\}$ и $k\ \{\bar{1}01\}$, при чемъ $a : b : c = 0.9603 : 1 : 0.9159$, а $\beta = 102^{\circ}27'$.

Комбинаціи голоэдріи моноклинической системы въ видѣ превосходно образованныхъ кристалловъ гипса, полевыхъ шпатовъ (см. рис. 33) и т. п. явились одними изъ первыхъ кристалловъ, которые были научно изучены. Еще въ концѣ XVII стол. Левенгукъ доказывалъ постоянство гранныхъ угловъ на гипсѣ, кристаллизующемся въ этомъ строеніи. Однако, прошло долгое время, пока они были выдѣлены въ особую кристаллическую систему; ихъ долгое время считали подотдѣломъ—геміэдріей—ромбической системы. Окончательно они были отнесены въ отдѣльную кристаллическую систему лишь послѣ работъ Купффера (1826), установившаго косыя координатныя оси.

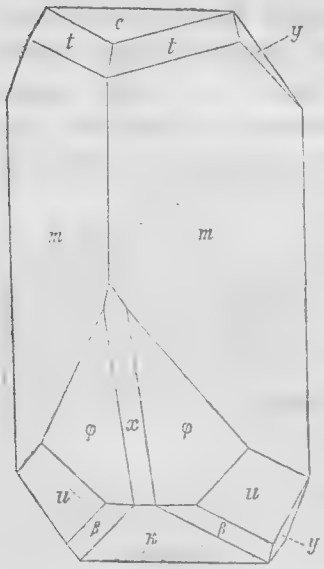


Рис. 82.

285. Гораздо медленнѣе и труднѣе проникало въ науку сознаніе о существованіи веществъ, кристаллизующихся въ геміэдріяхъ моноклинической системы. Теоретически эти строенія были правильно установлены еще Гесселемъ (1830), но научная мысль была введена въ заблужденіе работами Митчерлиха (1826), Моса и Науманна, которые отдѣляли нѣкоторыя строенія моноклинической системы, то въ особую ея геміэдрію, то въ концѣ концовъ въ особую *диклиноэдрическую систему*. Сюда они относили строенія голоэдріи, обладавшія координатными осями моноклинической системы, но въ которыхъ нѣкоторыя простыя формы имѣли количество плоскостей не соотвѣтствующее симметріи моноклинической и триклинической системы, напр. $\{hk0\}$ предполагалось состоящимъ изъ 4 плоскостей, а одновременно $\{hkl\}$ изъ двухъ. Изъ явленій симметріи такіе случаи не вытекаютъ, ибо это плоскости одного рода (§ 275); многочисленныя относившіяся

сюда вещества послѣ тщательнаго изслѣдованія оказались принадлежащими то къ обычной моноклинической, то къ триклинической системамъ. Однако исканіе этихъ многогранниковъ вызвало большіе научные споры, длившіеся десятки лѣтъ, въ 1830—1870 годахъ.

286. Настоящія геміэдріи, выведенныя Гесселемъ, въ это время оставались безъ вниманія. Одна изъ нихъ — *строеніе* λ^2 — была однако вскорѣ встрѣчена при изученіи органическихъ соединеній, впервые на кристаллахъ правой и лѣвой винной кислотъ (рис. 53) въ 1840 году Ганкелемъ, который обратилъ вниманіе на появленіе при этомъ энантіоморфныхъ комбинацій. Но эти наблюденія, равно какъ и описанія кристаллическихъ многогранниковъ тростниковаго сахара, сдѣланныя вскорѣ столь извѣстнымъ позже агрономомъ Эм. Вольффомъ (1843), не обратили на себя должнаго вниманія. Лишь въ 1847 году послѣ работъ Пастёра надъ соединеніями винныхъ и другихъ кислотъ (главнымъ образомъ надъ виннокислымъ аммоніемъ), это строеніе моноклинической системы было окончательно признано. Однако, оно долго считалось случайнымъ и рѣдкимъ явленіемъ; кристаллографы-теоретики подходили къ нему ощупью и виднѣйшій изъ представителей науки въ то время Науманнъ (1856) долго искалъ различія между случаями, наблюдаемыми Пастёромъ съ одной стороны, Ганкелемъ и Вольффомъ съ другой. Вторично уже Бравэ, а затѣмъ Гадолинъ теоретически вывели эту геміэдрію и объяснили всѣ кажущіяся отклоненія.

Гораздо болѣе поздно была доказана другая геміэдрія—*строеніе* π. Первый случай наблюдался еще въ 1856 году на кристаллахъ *діопсида* изъ долины Алы въ Пьемонтѣ Гессенбергомъ,—но эти наблюденія, хотя и подтвержденныя на кристаллахъ того же минерала изъ разныхъ мѣстностей Деклуазо (1862), Уилліамсомъ (1885) и другими мало обратили на себя вниманія и считались случайнымъ явленіемъ. Лишь въ 1891 году Фоккомъ былъ описанъ другой случай вещества, принадлежащаго къ тому же самому строенію—кристалловъ тетратіоновокислаго калія; съ тѣхъ поръ то же строеніе было найдено для многихъ, довольно обычныхъ, веществъ — напр. для эпидота, сколецита и т. д., которые раньше относились къ голоэдріи.

287. Вещества строенія λ^2 чрезвычайно распространены въ природѣ, главнымъ образомъ среди кристалловъ органическихъ веществъ, обладающихъ въ своей формулѣ асиметрическимъ углеродомъ. Какъ

примѣры комбинацій можно привести рис. 83—кристаллъ *тростниковаго сахара* $C_{12}H_{22}O_{11}$ по Вольффу (1843), гдѣ $a=\{100\}$, $c=\{001\}$, $r=\{101\}$, $r'=\{\bar{1}01\}$, $p=\{110\}$, $p'=\{\bar{1}10\}$, $o=\{111\}$; $q=\{0\bar{1}1\}$, при чемъ $a:b:c=1.2595:1:0.8782$, $\beta=103^{\circ}30'$;

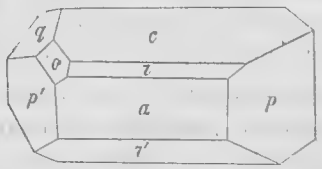


Рис. 83.

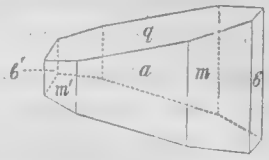


Рис. 84.

рис. 84 — *молочный сахаръ* $C_{12}H_{24}O_{12}$, по Шабусу (1855), гдѣ $a=\{100\}$, $m=\{110\}$, $b=\{010\}$, $q=\{0\bar{1}1\}$, $b'=\{0\bar{1}0\}$, причемъ $a:b:c=0.3677:1:0.2143$, $\beta=109^{\circ}47'$ (Траубэ 1891).

Гораздо рѣже наблюдались кристаллическіе поліэдры *строенія* π. Въ огромномъ большинствѣ случаевъ они даютъ комбинаціи, не отличаемыя отъ голоэдрическихъ тѣлъ (ср. § 273). Какъ примѣръ многогранниковъ, въ которыхъ ясна эта геміэдрія, можно привести, напр.—рис. 85—*тетратіоновокислый кали* — $K_2S_4O_6$ — по Фокку (1891), гдѣ $a=$

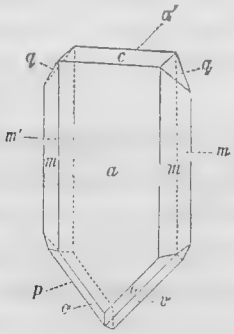


Рис. 85.

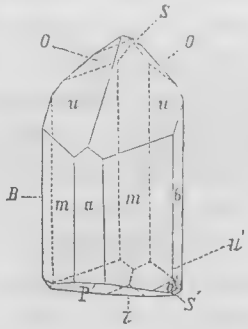


Рис. 86.

$\{100\}$, $a'=\{\bar{1}00\}$, $c=\{001\}$, $q=\{011\}$, $m=\{110\}$, $m'=\{\bar{1}10\}$, $o=\{11\bar{1}\}$, $v=\{13\bar{3}\}$, $p=\{\bar{1}1\bar{1}\}$, при чемъ $a:b:c=0.9302:1:1.2666$, $\beta=104^{\circ}16'$ или рис. 86—*діопсидъ* изъ Rossie въ штатѣ Нью-Іоркъ по Пенфильду (1889), гдѣ $a=\{100\}$, $m=\{110\}$, $b=\{010\}$, $c=\{00\bar{1}\}$, $u=\{111\}$, $u'=\{\bar{1}1\bar{1}\}$, $o=\{\bar{2}21\}$, $o'=\{22\bar{1}\}$, $s=\{\bar{1}11\}$, $s'=\{11\bar{1}\}$, $p'=\{10\bar{1}\}$, при чемъ $a:b:c=1.0921:1:0.5893$, $\beta=74^{\circ}10'$ по фомъ Рату (1873).

288. Ромбическая система. Къ послѣдней системѣ изъ двуосной группы кристалловъ относятся (§ 127) три строенія (класса): 1) голоэдрія — $3\lambda^2 c\, 3\pi$, 2) $3\lambda^2$ и 3) $\lambda^2\, 2P$.

Въ этой системѣ количество ортогональныхъ зонъ (§ 257) чрезвычайно увеличивается и онѣ являются наиболѣе характерными для ея многогранниковъ. Въ моноклинической системѣ оси всѣхъ ортогональныхъ зонъ лежали въ одной плоскости (въ плоскости симметріи или въ плоскости, перпендикулярной къ L^2, т. е. въ плоскости XY) (§ 275); въ системѣ ромбической такихъ плоскостей, всегда взаимноперпендикулярныхъ, можетъ быть три (перпендикулярныхъ къ L^2 или параллельныхъ P).

Въ этомъ легко убѣдиться изъ разсмотрѣнія симметріи классовъ ромбической системы. Подобно тому, какъ мы это наблюдали въ моноклинической (§ 275) системѣ, и здѣсь перпендикуляры къ λ^2, (которые, очевидно лежатъ въ одной плоскости) будутъ осями ортогональныхъ зонъ. Слѣдовательно въ голоэдріи и въ строеніи $3\lambda^2$, уже на этомъ основаніи должны существовать 3 плоскости, всѣ линіи которыхъ [1]) являются осями ортогональныхъ зонъ. Но то же самое наблюдается и для послѣдняго строенія $\lambda^2\, 2P$; въ немъ $2P$ всегда дѣлаютъ между собою 90°, слѣдовательно линія, расположенная въ одной изъ этихъ плоскостей симметріи, будетъ осью ортогональной зоны, ибо другая P будетъ непремѣнно перпендикулярна къ одной изъ проведенныхъ черезъ эту ось граней.

289. Плоскости, перпендикулярныя къ L^2 или параллельныя P, принимаются за координатныя и строятъ ячейку ромбической системы. Такимъ образомъ за X, Y и Z выбираются L^2, а когда ихъ нѣтъ L^1. Для каждаго многогранника существуетъ т. о. нѣсколько (maximum 6) разныхъ *постановокъ кристалла*, т. е. выбора разныхъ векторовъ за $+X$, $+Y$ и $+Z$ (§ 152). Въ ячейкѣ углы $\alpha=\beta=\gamma$ равны 90° и не зависятъ отъ химическаго состава. Мѣняются лишь кристаллическія оси $a:b:c$. Ромбическая система (т. е. ея ячейка) характеризуется т. о. только *двумя* постоянными, различными для разныхъ тѣлъ: $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$.

---

[1]) Конечно, подчиняющіяся закону Гаюи, т. е. для которыхъ въ символѣ $[hkl]$, характеристики будутъ числами цѣлыми и небольшими.

Выборъ отрѣзковъ a, b и c довольно произволенъ. Обыкновенно выбираютъ за основную (§ 155) плоскость ту пирамидальную форму, которая является наиболѣе развитой и распространенной въ многогранникахъ даннаго тѣла.

Такъ какъ пирамидальныя плоскости далеко не всегда наблюдаются въ тѣлахъ ромбической системы и встрѣчаются относительно рѣже, чѣмъ другія—доматическія и призматическія—формы, то еще чаще принимаютъ самыя обычныя и развитыя изъ этихъ послѣднихъ плоскостей за (101) и (110) или (011) и по нимъ вычисляютъ параметры (111) или основной формы (§ 264).

По гипотезѣ Грассманна какъ разъ эти доматическія и призматическія плоскости являются первыми производными основныхъ силовыхъ векторовъ (§ 194 сл.). Поэтому вычисленная на основаніи ихъ ячейка позволяетъ легко сравнивать ячейки разныхъ веществъ, ибо форма ячейки соотвѣтствуетъ взаимнымъ отношеніямъ силовыхъ векторовъ этихъ тѣлъ.

Однако, наружная форма многогранника лишь отчасти, какъ увидимъ, получается отъ проявленія векторіальныхъ силъ, а въ значительной степени (§ 197) зависитъ отъ поверхностныхъ слагаемыхъ (поверхностныхъ натяженій); поэтому нерѣдко принимаютъ за основную плоскость не плоскость, перпендикулярную къ первой трансверсали (§ 196), а иную форму, являющуюся производной отъ поверхностныхъ силъ. Это отражается на индексахъ и приводитъ къ инымъ ячейкамъ, между собою не всегда сравнимымъ.

Въ установкѣ ячейки ромбической системы, въ величинѣ кристаллическихъ осей, такимъ образомъ, нѣтъ полной опредѣленности. Но все же, конечно, измѣненія ея величины могутъ быть только простыя, отвѣчающія закону Гаюи, т. к. она всегда выводится изъ наблюденія гранныхъ угловъ кристаллическихъ плоскостей.

290. Въ ромбической системѣ мы встрѣчаемъ *три рода плоскостей*, которыя никогда не могутъ быть между собою смѣшиваемы и не могутъ — при перемѣнѣ координатъ — переходить другъ въ друга. Онѣ различаются по своему положенію по отношенію къ координатнымъ осямъ. Это будутъ:

1) *Пирамидальныя* плоскости—(hkl), $(hk\bar{l})$ и т. д.—пересѣкаютъ всѣ три координатныя оси.

2) *Призматическія и доматическія* плоскости—параллельны од-

ной изъ координатныхъ осей—$(hk0)$, $(0kl)$, $(h0l)$ и т. д. Призмы и домы не отличимы по формѣ другъ отъ друга; ихъ различіе зависитъ отъ выбора за ось X, Y или Z той или иной L^2 или $Л^1$. Выборъ же этотъ совершенно не зависитъ отъ симметріи и производится наблюдателемъ на основаніи другихъ соображеній, нерѣдко произвольно.

Только въ *строеніи* $\lambda^2\,2P$ всегда выбираютъ ось симметріи 2-го порядка за ось Z, а за оси X и Y выбираютъ $Л^1$. Но и это лишь кажущееся исключеніе, такъ какъ различіе призмъ отъ домъ въ этомъ строеніи зависитъ отъ установившагося обычая. На основаніи симметріи можно и здѣсь принять $Л^1$ за Z, какъ это не разъ и дѣлалось.

3) *Пинакоидальныя* плоскости — параллельныя двумъ координатнымъ осямъ — (001), (100), (010) и т. д. Принято принимать L^2 за ось Z, слѣдовательно въ строеніи $\lambda^2\,2P$ — нельзя произвольно выбрать за (001) любой изъ пинакоидовъ; въ другихъ же строеніяхъ индексъ пинакоида зависитъ отъ произвольнаго выбора той или иной изъ L^2 за Z.

291. Въ этой системѣ мы впервые встрѣчаемся съ простыми *замкнутыми* формами. Это будутъ пирамидальныя формы для строеній $3\lambda^2 c\,3\pi$ и $3\lambda^2$.

Замкнутый многогранникъ можетъ быть ограниченъ minimum четырьмя плоскостями; при этомъ, какъ извѣстно, эти 4 плоскости отнюдь не должны быть между собою параллельны и не должны пересѣкаться въ параллельныхъ между собою прямыхъ.

Какъ легко убѣдиться (§ 295), изъ числа всѣхъ простыхъ формъ съ 4 и большимъ количествомъ плоскостей, только два случая ромбической системы отвѣчаютъ этому условію: во 1-хъ $\{hkl\}$ голоэдріи, состоящая изъ 8 плоскостей, лежащихъ во всѣхъ октантахъ и во 2-хъ $\{hkl\}$ или $\{hkl\}$ строенія $3\lambda^2$, которая состоитъ изъ 4-хъ непараллельныхъ плоскостей, ребра которыхъ также непараллельны.

292. На эти простыя формы прежде было обращено большое вниманіе, такъ какъ тѣ случаи, когда *простая форма* кристаллографа совпадаетъ съ простымъ выпуклымъ многогранникомъ геометріи считались чѣмъ то особеннымъ. На ихъ изученіи развилась геометрическая кристаллографія. Но въ дѣйствительности, простыя замкнутыя формы ничѣмъ неотличимы отъ тѣхъ кристаллическихъ

поліэдровъ которые образованы комбинаціями открытыхъ простыхъ формъ. Въ нѣкоторыхъ строеніяхъ (и даже системахъ — напр. въ моноклинической и триклинической) замкнутыя простыя формы отсутствуютъ, а между тѣмъ всѣ явленія и законы кристаллографіи сохраняются и не даютъ возможности уловить какое бы то ни было вліяніе замкнутыхъ простыхъ формъ. Для насъ замкнутыя простыя формы представляютъ лишь схематическіе многогранники, зависящіе отъ способа изученія кристаллическихъ поліэдровъ. Но они, конечно, пріобрѣтаютъ реальное значеніе тогда, когда дѣйствительно наблюдаются въ природѣ, ибо тогда они отвѣчаютъ опредѣленному физическому свойству.

Обѣ простыя замкнутыя формы ромбической системы наблюдаются безъ комбинацій, какъ большая рѣдкость, временами, въ кристаллизаціяхъ немногихъ веществъ. Такъ $\{hkl\}$ — голоэдріи, такъ-назыв. *ромбическая пирамида* наблюдалась для целестина — $Sr\,SO_4$ — напр. рис. 87

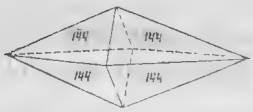


Рис. 87.

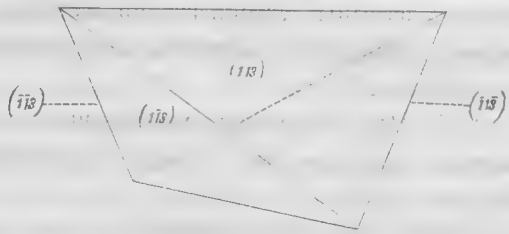


Рис. 88.

для целестина изъ Западной Виргиніи — $X\{144\}$ по Уилліямсу (1890), при чемъ $a:b:c = 0.7789:1:1.2800$ (Ауэрбахъ 1869) [1]). Но и здѣсь такіе простые многогранники образовывали большею частію параллельные сростки многихъ кристалловъ. Не менѣе рѣдки эти простыя формы и для строенія — $3L^2$. Они здѣсь называются *сфеноидами*. Какъ примѣръ, можно привести изрѣдка наблюдавшіеся сфеноиды α — *сѣры*

[1]) Другіе случаи почти неизвѣстны. Изъ минераловъ, кажется, только *оливинъ* иногда даетъ пирамиды $\{112\}$, напр. въ базальтахъ Файфшайра въ Шотландіи (Геддле 1901). Для англезита ($Pb\,SO_4$) описаны случаи пирамидъ изъ Дюфренда, (В. фонъ Лангъ 1857), но голоэдрическое строеніе англезита не доказано и сомнительно. То же самое можно сказать и для топазовъ, гдѣ какъ рѣдкость извѣстны такіе многогранники. Кое когда встрѣчались эти поліэдры въ органическихъ соединеніяхъ, напр. при кристаллизаціи віолуровой кислоты (Негри 1887) и т. д.

(большею частію встрѣчаются ихъ параллельные сростки), рис. 88—{113} по Фомъ Рату (1873) или рис. 89 —{1$\bar{1}$1} по Кенниготту и Цефаровичу (1876) — для кристалловъ α—сѣры изъ Сициліи, причемъ $a:b:c = 0.8130:1:1.9037$ [2]).

293. Различныя строенія отличаются, какъ извѣстно, главнымъ образомъ по количеству плоскостей, связанныхъ въ одну простую форму, и по ихъ индексамъ.

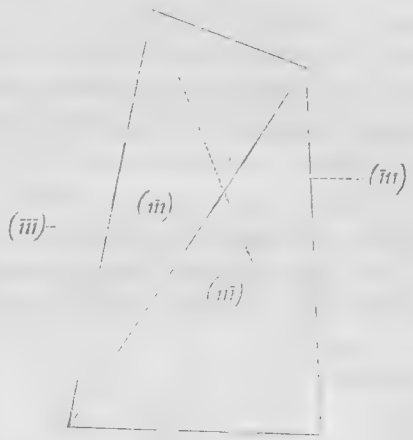


Рис. 89.

Въ этомъ можно легче всего ориентироваться при изученіи связи между различными гранями, обусловленной элементами симметріи, которые существуютъ въ строеніяхъ ромбической системы.

Такъ для *пирамидальныхъ* плоскостей:

(hkl)	связывается	существованіемъ	c	съ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$
»	»	$L^2 =$	X	» $(h\bar{k}\bar{l})$
»	»	$L^2 =$	Y	$(\bar{h}k\bar{l})$
»	»	$L^2 =$	Z	» $(\bar{h}\bar{k}l)$
»	»	$P =$	XY	» (hkl)
»	»	$P =$	XZ	» (hkl)
»	»	$P =$	YZ	» (hkl).

Другихъ элементовъ симметріи нѣтъ въ ромбической системѣ; съ другой стороны, въ тѣлѣ нѣтъ и другихъ пирамидальныхъ плоскостей съ характеристиками h, k и l. Поэтому, когда въ кристаллѣ существуютъ всѣ элементы симметріи, то $\{hkl\}$ состоитъ изъ 8 плоскостей, образующихъ ромбическую пирамиду, которая обнимаетъ всѣ возможныя пирамидальныя плоскости одинаковыхъ характеристикъ.

Въ строеніи $3L^2$ для $\{hkl\}$ одновременно существуютъ плоскости (hkl), $(h\bar{k}\bar{l})$, $(\bar{h}k\bar{l})$ и $(\bar{h}\bar{k}l)$. Онѣ образуютъ *сфеноидъ*. Очевидно,

[2]) Сфеноиды также наблюдались въ свободномъ видѣ въ нѣкоторыхъ кристаллизаціяхъ органическихъ веществъ, напр. въ глютаминовой кислотѣ (Эббеке 1885) и др.

остается еще четыре пирамидальныхъ плоскости, которыя не связаны съ данными, но связаны симметріей $3L^2$ между собою; онѣ образуютъ другой сфеноидъ $\{h\bar{k}l\}$.

Для $\lambda^2 2P$ (гдѣ $\lambda^2 = Z$, а $2P = XZ$ и YZ), $\{hkl\}$ имѣетъ четыре плоскости (hkl), (hkl), (hkl) и (hkl). Эти четыре плоскости лежатъ въ верхнихъ октантахъ. Остаются еще четыре нижнихъ плоскости, связанныхъ между собою и независимыхъ отъ $\{hkl\}$; онѣ образуютъ другую простую форму $\{hkl\}$.

Такимъ образомъ для строеній $3\lambda^2$ и $\lambda^2 2P$ мы имѣемъ два *рода* (§ 263) пирамидальныхъ формъ, а для голоэдріи всего одинъ ихъ родъ.

294. То же самое можетъ быть выведено и для другихъ плоскостей этой системы, пользуясь слѣдующей таблицей:

Черезъ:	c	$L^2=X$	$L^2=Y$	$L^2=Z$	$P=XY$	$P=XZ$	$P=YZ$
$(hk0)$ связано съ	$(\bar{h}\bar{k}0)$...	$(h\bar{k}0)$...	$(\bar{h}k0)$...	$(hk0)$...	не вліяетъ..	$(h\bar{k}0)$...	$(\bar{h}k0)$
$(0kl)$ „ „	$(0\bar{k}\bar{l})$...	$(0k\bar{l})$...	$(0k\bar{l})$...	$(0\bar{k}l)$...	$(0k\bar{l})$...	$(0k\bar{l})$...	не вліяетъ
$(h0l)$ „ „	$(\bar{h}0\bar{l})$...	$(h0\bar{l})$...	$(\bar{h}0\bar{l})$...	$(\bar{h}0l)$...	$(h0\bar{l})$...	не вліяетъ..	$(\bar{h}0l)$
(001) „ „	$(00\bar{1})$...	$(00\bar{1})$...	$(00\bar{1})$...	не вліяетъ..	$(00\bar{1})$..	не вліяетъ..	не вліяетъ
(010) „ „	$(0\bar{1}0)$...	$(0\bar{1}0)$...	не вліяетъ..	$(0\bar{1}0)$...	не вліяетъ..	$(0\bar{1}0)$...	не вліяетъ
(100) „ „	$(\bar{1}00)$...	не вліяетъ..	$(\bar{1}00)$...	$(\bar{1}00)$...	не вліяетъ..	не вліяетъ..	$(0\bar{1}0)$.

295. На основаніи этой таблицы и данныхъ для $\{hkl\}$ (§ 293) можно выяснить различіе простыхъ формъ для всѣхъ трехъ строеній этой системы. Мы здѣсь имѣемъ [1]):

Голоэдрія—$3\lambda^2$ $c3\pi$.	Строеніе $3\lambda^2$.	Строеніе $\lambda^2 2P$.
	1-ый родъ плоскостей:	
$\{hkl\}$—Пирамида [9])—8 пл. *.	$\{hkl\}$—Сфеноидъ [7])—4 пл. *.	$\{hkl\}$—Пирамида [9])—4
	$\{h\bar{k}l\}$ -	$\{hk\bar{l}\}$ - -
	2-ой родъ плоскостей:	
$\{hk0\}$ [8])—Призма—4.	$\{hk0\}$—Призма—4.	$\{hk0\}$—Призма -
$\{h0l\}$ [2]), $\{0kl\}$ [3])—Домы—4.	$\{h0l\}$ [2]), $\{0kl\}$ [3])—Домы—4.	$\{h0l\}$ [2]), $\{h0\bar{l}\}$ [2]), $\{0kl\}$ [3]), $\{0k\bar{l}\}$ [3])—Домы—2 пл.
	3-ій родъ плоскостей:	
$\{001\}$ [4]), $\{010\}$ [5]), $\{100\}$ [6])—Пинакоиды—2.	$\{001\}$ [4]), $\{010\}$ [5]), $\{100\}$ [6])—Пинакоиды—2.	$\{001\}$ [4]), $\{00\bar{1}\}$ [4])—Базопинакоиды—1. $\{100\}$ [6]), $\{010\}$ [5])—Боковые пинакоиды—2.

---

[1]) * — обозначаетъ замкнутую простую форму. [2]) H—макродома. Γ—призма 2-го рода (для $\lambda^2 2P$—дома 2-го рода). [3]) H—брахидома. Γ—призма 1-го рода (для $\lambda^2 2P$—дома 1-го рода). [4]) H—базопинакоидъ. Γ—третій пинакоидъ (для $\lambda^2 2P$—педіонъ). [5]) H—брахипинакоидъ. Γ—второй пинакоидъ. [6]) H—макропинакоидъ. Γ—первый пинакоидъ. [7]) $\{hkl\}$—правый и $\{h\bar{k}l\}$—лѣвый сфеноиды. Также и Науманнъ. По Гроту—бисфеноидъ. [8]) H—призма. Γ—призма 3-го рода. [9]) H—пирамида. Γ—бипирамида (для $\lambda^2 2P$—пирамида 4-го рода).

296. Многогранники ромбической системы чрезвычайно распространены въ природѣ. Понятно, поэтому, что они были описаны еще въ XVIII ст. и выдѣлены въ отдѣльную группу уже Бернгарди (1808). Наиболѣе обычны голоэдрическіе поліэдры, затѣмъ строеніе $3\lambda^2$, рѣже всего наблюдалось строеніе $\lambda^2 2P$. Строеніе $3\lambda^2$ съ трудомъ отличается (§ 295) отъ голоэдріи, и очень вѣроятно, что многія вещества, которымъ мы придаемъ строеніе $3\lambda^2 c3\pi$, окажутся принадлежащими къ классу $3\lambda^2$.

Какъ примѣръ многогранниковъ голоэдріи могутъ, напр., служить: рис. 90—*эшинитъ* изъ Ильменскихъ горъ по Г. Розе (1842), гдѣ $m=\{110\}$, $r=\{120\}$, $b=\{010\}$, $o=\{111\}$, $v=\{021\}$, при

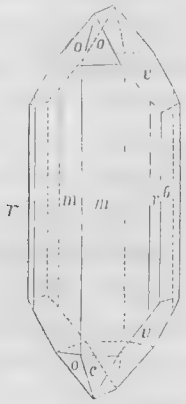


Рис. 90.

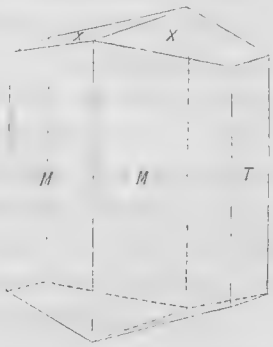


Рис. 91.

чемъ $a:b:c=0.4866:1:0.6736$ (Кокшаровъ 1858) или рис. 91—*брошантитъ* изъ Нижне-Тагильскихъ рудниковъ на Уралѣ по Н. И. Кокшарову (1858), гдѣ $M=\{110\}$, $P=\{010\}$, $\chi=\{021\}$, при чемъ $a:b:c=0\cdot7739:1:0\cdot2435$.

297. Въ строеніи $3\lambda^2$ нѣкоторыя комбинаціи обладаютъ энантіоморфными свойствами. Какъ видно изъ § 217, такими свойствами будутъ обладать только поліэдры, въ которыхъ встрѣчаются пирамидальныя плоскости, т. е. сфеноиды (§ 293). Эти сфеноиды являются закрытой формой — а потому сами по себѣ, безъ комбинацій съ другими простыми формами, являются энантіоморфными поліэдрами. Такъ $\{hkl\}$ получаетъ названіе праваго сфеноида, а $\{h\bar{k}l\}$ — лѣваго. Эти названія не указываютъ (ср. § 213), что въ правыхъ изомерахъ встрѣчаются только сфеноиды $\{hkl\}$, а въ лѣвыхъ

$\{h\bar{k}l\}$. Въ обѣихъ разностяхъ могутъ находиться и тѣ и другіе сфеноиды — но обыкновенно наблюдаются правые и лѣвые сфеноиды разныхъ характеристикъ. Если же наблюдаются правые и лѣвые сфеноиды одинаковыхъ характеристикъ, то обыкновенно правый находится въ правыхъ изомерахъ, а лѣвый въ лѣвыхъ. Если они появляются на одномъ многогранникѣ, то плоскости ихъ развиты (§ 183) различно. Все это вполнѣ ясно слѣдуетъ изъ векторіальныхъ свойствъ кристалла (§ 215).

Надо однако имѣть въ виду, что сфеноиды одинаковаго знака никогда не могутъ быть идентичны для лѣвыхъ и правыхъ комбинацій тѣла. Сфеноидъ, напр. $\{hkl\}$, въ однихъ комбинаціяхъ образованъ гранями, которыя перпендикулярны посолоннымъ векторамъ, а въ другихъ противусолоннымъ. Вслѣдствіе этого физическія явленія, происходящія въ плоскостяхъ такихъ сфеноидовъ (т. е. въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ силовымъ векторамъ) будутъ различны. *Плоскости сфеноида $\{hkl\}$ въ правыхъ и лѣвыхъ энантіоморфныхъ комбинаціяхъ* (resp. оптическихъ изомерахъ вещества) *не могутъ обладать идентичными свойствами.* И дѣйствительно, мы встрѣтимся съ этимъ различіемъ при изученіи явленій вытравленія. Есть *два* разныхъ сфеноида — $\{hkl\}$ и *два* разныхъ сфеноида $\{h\bar{k}l\}$; мы можемъ отличить ихъ въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣемъ дѣло со свойствами ихъ поверхностей. *Конечно, это касается всѣхъ простыхъ формъ; въ энантіоморфныхъ разностяхъ строенія $3\lambda^2$ — есть 2 разныхъ призмы $\{hk0\}$ и т. д.*

Многогранники строенія $3\lambda^2$ отличимы отъ многогранниковъ $3\lambda^2 c3\pi$ только въ тѣхъ случаяхъ, когда въ комбинаціяхъ появляются пирамидальныя плоскости; всѣ прочія простыя формы идентичны съ голоэдріей (§ 295). Такъ какъ пирамидальныя формы появляются далеко не всегда, то отличить поліэдры $3\lambda^2$ отъ поліэдровъ голоэдріи иногда возможно лишь путемъ изслѣдованія физическихъ свойствъ. Очень вѣроятно, что многія вещества, которымъ мы придаемъ строеніе $3\lambda^2 c3\pi$, въ дѣйствительности кристаллизуются въ строеніи $3\lambda^2$.

Какъ примѣръ многогранниковъ этого строенія можно привести — рис. 92—*a*—*правый* и 92 *b*—*лѣвый винокислый антимонилъ калій* по Бруку (1824) и Пастеру (1847), гдѣ $o = \{111\}$, $o' = \{1\bar{1}1\}$, $p = \{110\}$ и $c = \{001\}$ при чемъ $a : b : c = 0.9556 : 1 : 1.1054$;

въ этихъ комбинаціяхъ ясно различіе правыхъ и лѣвыхъ изомеровъ вещества по наблюдаемымъ въ нихъ правымъ и лѣвымъ сфеноидамъ.

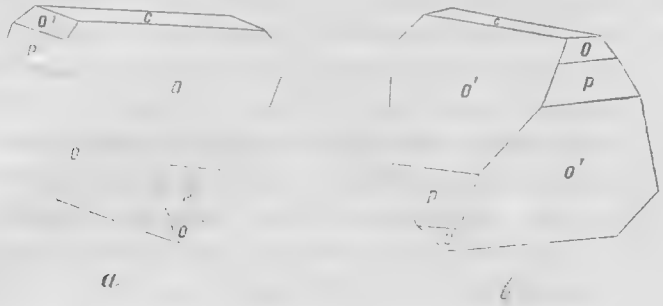


Рис. 92.

Другимъ примѣромъ могутъ служить кристаллы *лѣваго аспарагина*— рис. 93 по Миллеру (1835), гдѣ наблюдаются $\{110\}$, $\{021\}$, $\{001\}$ и $\{\bar{1}\bar{1}1\}$, при чемъ $a:b:c = 0.4737:1:0.8327$.

Вещества *строенія* $3\lambda^2$ были впервые открыты въ 1823 году Брукомъ на кристаллахъ сѣрнокислыхъ солей магнія и цинка. Брукъ, изслѣдованія котораго были подтверждены Грайлихомъ (1856), не сдѣлалъ никакихъ выводовъ изъ своихъ наблюденій и только работы Пастера (1847 сл.) окончательно установили существованіе многогранниковъ этого строенія [1]).

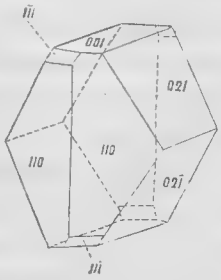


Рис. 93.

298. Значительно меньше распространены въ природѣ тѣла *строенія* λ^2 *2P*. Они стали извѣстны очень давно, почти одновременно со строеніями $3\lambda^2$. Впервые случаи этого рода наблюдали Гаюи (1822) на топазѣ и Мосъ (1824) на каламинѣ. Но они приняли эти формы за случайныя явленія роста; правильное ихъ значеніе было указано въ 1830 году Гесселемъ, но вниманіе они обратили на себя только послѣ открытія въ нихъ связи электрическихъ свойствъ съ гемиморфнымъ развитіемъ формъ, сдѣланнаго для каламина еще въ 1829 году Келеромъ, но точно изслѣдованнаго лишь въ 1843 году Розе и Рис-

---

[1]) Еще въ 1818 году Брейтгаунтъ предполагалъ существованіе многогранниковъ этого типа въ кристаллахъ андалузита. Строеніе андалузита до сихъ поръ не можетъ считаться точно установленнымъ.

сомъ. Однако въ общее сознаніе, какъ равнозначныя съ строеніями $3\lambda^2$ и $3\lambda^2 c\, 3\pi$, вошли они лишь въ 1870—1880-хъ годахъ.

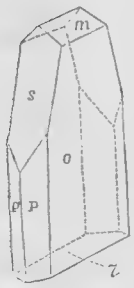


Рис. 94.

Всѣ эти вещества обладаютъ гемиморфными формами (§ 218), причемъ такими являются всѣ простыя формы, которыя пересѣкаютъ ось Z; тогда какъ плоскости, параллельныя Z (т. е. формы $\{hk0\}$, $\{010\}$ и $\{100\}$) не обладаютъ гемиморфизмомъ, и перпендикулярные къ нимъ векторы не полярны (§ 205). Наиболѣе рѣзкими свойствами гемиморфной оси обладаетъ λ^2 (принимаемая за ось Z), другіе векторы обладаютъ тѣмъ меньшей полярностію (тѣмъ меньшимъ различіемъ въ свойствахъ векторовъ обоихъ направленій), чѣмъ бо́льшій уголъ они дѣлаютъ съ λ^2.

Какъ примѣръ комбинацій этого строенія можно привести рис. 94—*струвитъ*—$Am\,Mg\,PO_4 6H_2O$—изъ Брауншвейга по Задебеку (1878), гдѣ $o=\{010\}$, $p=\{110\}$, $s=\{101\}$, $m=\{011\}$, $r=\{00\bar{1}\}$, причемъ $a:b:c=0.5667:1:0.9121$ или рис. 95—*каламинъ* изъ Ильдеканскаго рудника въ Забайкальи по Розе (1843), гдѣ $b=\{010\}$, $m=\{110\}$, $e=\{011\}$, $t=\{301\}$ и $v=\{121\}$, причемъ $a:b:c=$ $=0.7834:1:0.4778$ (Шрауфъ 1859).

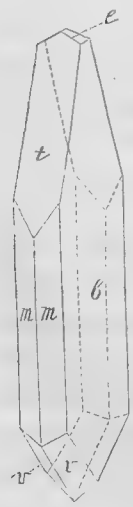


Рис. 95.

299. **Квадратная система.** Къ квадратной системѣ относится (§ 127) *семь* кристаллическихъ строеній: 1) $\lambda^4 4L^2 c\ \pi\ 4P$, 2) $\lambda^4 4L^2$, 3) $\lambda^2\, 2L^2\ 2P'$, 4) $\lambda^4 c\ \pi$, 5) $\lambda^4\ 4P$, 6) λ^4 и 7) $Л^4$. Далеко не всѣ изъ этихъ строеній наблюдались въ природѣ, и для большинства изъ нихъ извѣстно очень немного представителей. Въ значительной степени это обусловлено трудностію различенія кристалловъ, принадлежащихъ къ строеніямъ низшей симметріи; кристаллы этихъ веществъ, какъ мы видѣли (§ 272 и др.) и увидимъ позже подробнѣе, нерѣдко принимаютъ внѣшній обликъ поліэдровъ высшей симметріи. Можетъ быть, только поэтому при изученіи тѣлъ квадратной системы получается впечатлѣніе о рѣзкомъ преобладаніи среди нихъ многогранниковъ, принадлежащихъ къ голоэдріи.

Наиболѣе характерной чертой структуры этихъ кристалловъ является рѣзко выраженный *осевой* характеръ ихъ свойствъ.

Одно направленіе, которое всегда принимается за вертикальную ось (ось Z), рѣзко отличается отъ всѣхъ остальныхъ векторовъ и, очевидно, въ формѣ многогранниковъ это должно сказываться на совершенно особомъ свойствѣ плоскостей, перпендикулярныхъ къ этому вектору (§ 205) т. е. пинакоидовъ (001) и ($00\bar{1}$).

300. Всѣ правильности въ строеніи этихъ кристалловъ могутъ быть изучаемы по отношенію къ этому особенному вектору (такъ назыв. *главной оси* кристалла). Эти правильности проявляются различно для тѣхъ физическихъ свойствъ, которые выражаются непрерывною функціей (§ 128), и для тѣхъ, которые подчиняются закону многогранника.

Для первыхъ свойствъ различія векторовъ зависятъ исключительно отъ углового ихъ положенія по отношенію къ главной оси: всѣ векторы, дѣлающіе одинаковый уголъ съ осью Z, для такихъ свойствъ вполнѣ идентичны. Такимъ образомъ всѣ идентичные векторы являются образующими коническихъ поверхностей, осью которыхъ служитъ Z.

Для тѣхъ же явленій, которыя выражаются закономъ многогранника, нѣтъ всегда тождества между векторами, дѣлающими одинаковый уголъ съ осью Z—если только они лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ; но векторы, одинаково наклоненные къ оси Z и въ то же время лежащіе въ одной плоскости, всегда идентичны; они образуютъ своеобразную пару идентичныхъ векторовъ. Мало того, благодаря характеру оси Z квадратной системы, всегда идентичны двѣ пары такихъ векторовъ, лежащія въ двухъ взаимноперпендикулярныхъ плоскостяхъ. Для всѣхъ строеній квадратной системы, въ которыхъ $Z=\lambda^4$, это неизбѣжно вытекаетъ изъ свойствъ оси симметріи 4-го порядка (ср. § 90 сл.), такъ какъ взаимноперпендикулярныя плоскости, пересѣкающіяся въ λ^4 всегда идентичны, т. е. другими словами совпадаютъ другъ съ другомъ при поворотѣ на 90^0 вокругъ λ^4.

Но то же самое существуетъ и для двухъ строеній квадратной системы, въ которыхъ нѣтъ λ^4: 1) для строенія $Л^4$ и 2) для $\lambda^2 2L^2 2P'$. Идентичность одинаково наклоненныхъ паръ векторовъ въ двухъ взаимноперпендикулярныхъ плоскостяхъ, пересѣкающихся въ $Л^4$, вытекаетъ логически изъ самаго понятія $Л^4$ и не требуетъ никакихъ разъясненій.

Но явленія, представляемыя симметріей $\lambda^2 2L^2 2P'$ требуютъ нѣкоторыхъ разъясненій.

301. На основаніи законовъ совмѣстнаго нахожденія элементовъ симметріи (§§ 110 сл.), мыслимо только одно распредѣленіе $3L^2 2P$: именно, такое, въ которомъ P не должна быть перпендикулярна къ L^2 (иначе появился бы центръ симметріи—§ 110—который отсутствуетъ въ этомъ строеніи). Въ то же время $2P$ должны пересѣкаться (§ 111) въ одной изъ L^2; эту ось мы обозначаемъ λ^2. Она будетъ главной осью (§ 300). Въ такомъ случаѣ надо допустить, что $2L^2$ перпендикулярны къ λ^2 и въ то же время взаимноперпендикулярны и дѣлаютъ уголъ въ 45^0 съ плоскостями симметріи. Такое распредѣленіе элементовъ симметріи мы и выражаемъ (ср. § 108) символомъ $\lambda^2 2L^2 2P'$.

На основаніи этой симметріи идентичность плоскостей, проходящихъ черезъ главную ось, будетъ вполнѣ соотвѣтствовать такой симметріи, въ которой есть ось симметріи 4-го порядка [1]). Въ самомъ дѣлѣ (рис. 96), возьмемъ разрѣзъ, перпендикулярный къ главной оси ($=\lambda^2$); пусть P и P' будутъ слѣдами плоскостей симметріи, а L' и L слѣдами L^2. Въ такомъ случаѣ, плоскость, проходящая черезъ λ^2 будетъ или совпадать съ P или съ L^2 или лежать между ними. Если она совпадаетъ съ P или L^2, то само собою понятно (такъ какъ есть двѣ неотличимыхъ P или L^2), что въ многогранникѣ существуетъ перпендикулярная къ ней, идентичная съ ней плоскость кристалла. Другими словами, каждый ея векторъ, будетъ имѣть тогда идентичный, перпендикулярный къ себѣ векторъ. То же самое будетъ наблюдаться и въ томъ случаѣ, когда плоскость не совпадаетъ съ P

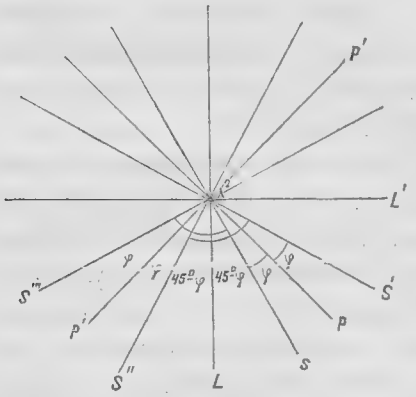


Рис 96.

[1]) Мы уже ранѣе приняли (§ 131) такое свойство строенія $\lambda^2 2L^2 2P'$ для физическихъ свойствъ, подчиненныхъ закону эллипсоида—но выводъ этого явленія не былъ тогда нами сдѣланъ.

или L^2. Положимъ, слѣдъ ея S дѣлаетъ уголъ φ^0 съ P; въ такомъ случаѣ, на основаніи свойствъ P по другую отъ нея сторону появится другая плоскость S' подъ тѣмъ же угломъ φ къ P. Но свойства L^2 (которая дѣлаетъ уголъ $45^0-\varphi$ съ S) вызываютъ появленіе по другую ея сторону на разстояніи $45^0-\varphi$ новой плоскости, S'', — дѣлающей уголъ φ съ P', а P', какъ плоскость симметріи, вызываетъ по другую ея сторону на разстояніи φ плоскость S''', идентичную съ S''. Такимъ образомъ симметрія этого строенія требуетъ появленія 4-хъ идентичныхъ плоскостей, пересѣкающихся въ главной оси (когда онѣ не совпадаютъ съ P' или L^2), причемъ легко убѣдиться, что эти плоскости будутъ попарно взаимноперпендикулярны, т. е. $S \perp S'''$ и $S' \perp S''$.

302. Итакъ, распредѣленіе векторовъ квадратной системы таково, что *каждый изъ нихъ имѣетъ идентичный съ собою и перпендикулярный къ себѣ векторъ, дѣлающій одинаковый съ нимъ уголъ по отношенію къ главной оси кристалла.*

Такое распредѣленіе имѣетъ огромное значеніе при изученіи физическихъ свойствъ кристалловъ этой системы и рѣзко выражается на формѣ ея ячейки.

За ось Z берется, какъ я уже говорилъ, λ^4, а если ея нѣтъ—λ^2. За оси X и Y мы беремъ L^2, если ихъ нѣтъ $Л^1$—а если нѣтъ и этихъ элементовъ симметріи, то 2 какихъ-нибудь взаимноперпендикулярныхъ и перпендикулярныхъ къ Z оси зонъ (въ строеніяхъ 1) λ^4, 2) $Л^4$ и 3) $\lambda^4 c\pi$) (ср. § 261). Согласно изложеннымъ въ предыдущихъ §§ даннымъ — эти оси всегда идентичны, *слѣдовательно кристаллическія оси X и Y равны* (ибо онѣ взаимноперпендикулярны и одинаково наклонены къ главной оси).

Такимъ образомъ, ячейка этой системы представляетъ параллелипипедъ съ квадратнымъ основаніемъ; а разныя вещества отличаются только отношеніями между кристаллическими осями X и Y ($=a$) и кристаллической осью Z ($=c$). Можно характеризовать кристаллическую структуру этихъ тѣлъ только одной константой $\frac{a}{c}$ (непрерывной дробью), тогда какъ всѣ другіе элементы ячейки не зависятъ отъ химическаго состава и внѣшнихъ условій. Такъ $\alpha=\beta=\gamma=90^0$ и $a:a:c$.

303. Не менѣе рѣзко отличіе квадратной системы отъ преды-

дущей двуосной группы кристаллическихъ тѣлъ и по характеру зонъ, строящихъ ея многогранники. Здѣсь, какъ мы видѣли (§ 253) имѣется *изотропная зона*, параллельная оси Z. Эта изотропная ось принимается за главную и мы только что указали физическое значеніе ея въ структурѣ вещества квадратной системы (§ 300).

Не менѣе характернымъ и важнымъ свойствомъ этихъ строеній служитъ также и то, что въ квадратной системѣ не могутъ существовать косыя зоны, а *всѣ ея зоны—ортогональны* (§ 257) (кромѣ одной изотропной).

Прежде, чѣмъ перейти къ этому послѣднему признаку, остановимся нѣсколько на *свойствахъ* единственнаго *изотропнаго пояса*. Въ этомъ поясѣ положеніе плоскостей не зависитъ ни отъ химическаго состава тѣла, ни отъ внѣшнихъ условій среды; оно всецѣло обусловливается законами симметріи.

Гранные углы, которые здѣсь наблюдаются, общи для всѣхъ химическихъ тѣлъ и все ихъ отличіе можетъ заключаться только въ томъ, что для разныхъ химическихъ веществъ наблюдаются различныя простыя формы. Такъ какъ эта зона параллельна Z, то здѣсь могутъ встрѣчаться только призматическія и пинакоидальныя плоскости. Наблюдалось очень немного формъ, лежащихъ въ этой зонѣ. Изъ числа 224 искусственно полученныхъ и кристаллографически изученныхъ соединеній этой системы, въ 156 наблюдались плоскости въ этой зонѣ; однако почти всегда это были исключительно $\{110\}$ или $\{100\}$ или оба вмѣстѣ и только въ 5 случаяхъ (т. е. менѣе 2%) наблюдались плоскости иного, болѣе сложнаго индекса, главнымъ образомъ $\{310)\}$ (resp. $\{210\}$). Большинство этихъ исключительныхъ случаевъ относились къ строенію $\lambda^4 c\pi$. Какъ рѣдкое исключеніе встрѣчается вещество, дающее мощное развитіе этой зоны, именно хлорауратъ люпинина (по Шейбэ 1884), развивающій въ этой зонѣ 36 плоскостей съ неизмѣнными углами. Въ огромномъ большинствѣ случаевъ мы имѣемъ здѣсь только двѣ формы (8 плоскостей), $\{110\}$ и $\{100\}$, вмѣстѣ или отдѣльно, съ неизмѣнными углами въ 45^0 и 90^0.

Нѣсколько болѣе часты такія простыя формы среди минераловъ, гдѣ мы изучаемъ болѣе разнообразное вліяніе внѣшнихъ условій. Къ тому же кристаллическая структура ихъ лучше извѣстна (§ 186). Но и здѣсь изъ числа 49 изученныхъ квадратныхъ минераловъ, гдѣ на-

блюдались плоскости этой зоны, въ огромномъ большинствѣ случаевъ плоскости, иныя чѣмъ {110} и {010}, встрѣчаются чрезвычайно рѣдко—и въ значительной части—для 45%—наблюдались только {110} и {010}—т. е. только тѣ же постоянные углы 45° и 90°.

Слѣдовательно, нѣтъ причинъ въ механизмѣ кристалла, которыя бы заставляли вещество развивать въ поліэдрахъ неизмѣнные гранные углы — кромѣ угловъ, равныхъ 45° и 90°; эти послѣдніе наблюдаются въ подавляющемъ количествѣ квадратныхъ многогранниковъ. Такъ они извѣстны въ настоящее время въ 72% (200) изъ 273 кристаллографически изученныхъ веществъ квадратной системы.

304. Однако, вообще всѣ углы, которые наблюдаются въ этой зонѣ заслуживаютъ вниманія, такъ какъ все же они не зависятъ отъ химическаго состава или внѣшнихъ условій. Они характеризуютъ наиболѣе рѣзко законъ Гаюи и будутъ наблюдаться не только въ квадратной системѣ, но и въ правильной — въ зонахъ изогональныхъ, съ $\varphi = 45^0$ (§ 248, 251). При переходѣ тѣла квадратной системы въ тѣло правильной системы эти углы не мѣняются.

Очевидно, здѣсь могутъ наблюдаться только такіе гранные углы, тангенсы которыхъ соотвѣтствуютъ простымъ отношеніямъ, согласно закону Гаюи. Въ самомъ дѣлѣ, пусть (рис. 97) OX и OY — координатныя оси X и Y; какой-нибудь векторъ OA, перпендикулярный къ плоскости изотропной зоны, дѣлаетъ уголъ φ съ векторомъ OX (т. е. плоскость BAC, перпендикулярная къ AO, дѣлаетъ $180^0 - \varphi$ съ (100)). Въ такомъ случаѣ ясно, что параметры плоскости BAC, равные a и b или $\frac{1}{h}$ и $\frac{1}{k}$ (§ 154), относятся между собою какъ синусы противулежащихъ угловъ, т. е.

$$\frac{k}{h} = \frac{Sin\ \varphi}{Sin\ (90 - \varphi)} = tg\ \varphi.$$

Такимъ образомъ, въ этой зонѣ могутъ наблюдаться только такіе φ, тангенсы которыхъ даютъ простыя неизмѣнныя отношенія, простыя дроби.

Наиболѣе обычными изъ этихъ угловъ здѣсь будутъ:

(100) : (310)...18°26′ 5″.7 (100) : (110)...45° 0′0″.0 (100) : (130) : 71°33′54″.3
: (210)...26°33′54″.7 : (120)...63°26′5″.3 : (010) : 90° 0′ 0″.0

Огромное большинство другихъ плоскостей наблюдалось всего одинъ — два раза, въ одномъ — двухъ веществахъ и не имѣетъ никакого значенія.

Неизмѣнность этихъ угловъ зоны и независимость ихъ отъ химическаго состава тѣла, отъ его температуры и т. д. составляетъ одну изъ наиболѣе характерныхъ сторонъ въ структурѣ квадратныхъ поліэдровъ.

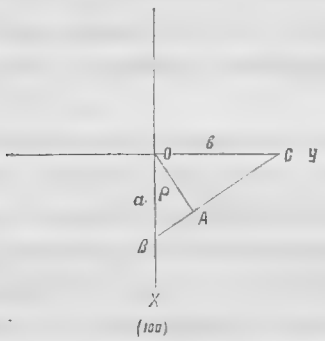


Рис. 97.

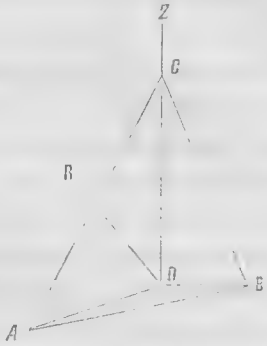


Рис. 98.

305. Другую, не менѣе важную черту ихъ структуры, составляетъ ортогональный характеръ всѣхъ прочихъ зонъ квадратной системы.

Простое и изящное доказательство этой теоремы было дано Федоровымъ (1897). Оно заключается въ слѣдующемъ. Возьмемъ въ квадратномъ кристаллѣ какое-нибудь ребро R (т. е. ось зоны— (§ 163). Проведемъ черезъ него и черезъ главную ось кристалла плоскость AOC, причемъ OC будетъ направленіемъ главной оси (рис. 98). Такъ какъ OC есть ось изотропнаго пояса, то къ каждой плоскости, проходящей черезъ нее, слѣдовательно и къ AOC, можно провести кристаллографически возможную (§ 254 прим.), перпендикулярную плоскость (§ 254); такой плоскостью будетъ BOC. Но точно также возможна и плоскость, перпендикулярная къ оси OC— плоскость AOB. Пересѣченіе этихъ двухъ возможныхъ плоскостей— ребро OB—точно также кристаллографически возможно—(есть ось зонъ—§ 163). Но если мы проведемъ черезъ два возможныхъ ребра OR и OB—плоскость—то и эта плоскость можетъ существовать въ кристаллѣ [1]). Такимъ образомъ ребро OR есть ребро пересѣченія

[1]) Такъ какъ она должна удовлетворять уравненіямъ (§ 164): $hu+kv+lw=0$

двухъ взаимноперпендикулярныхъ кристаллическихъ плоскостей—плоскости AOC и плоскости, проходящей черезъ R и OB. Слѣдовательно R — есть ось ортогональнаго пояса (§ 257).

Такимъ образомъ мы доказали, что всякое ребро въ квадратномъ многогранникѣ есть ось ортогональнаго пояса—т. е. *въ квадратной системѣ нѣтъ косыхъ зонъ.*

Это доказательство—общаго характера, оно зависитъ исключительно отъ присутствія изотропнаго пояса и потому одинаково примѣнимо къ обѣимъ системамъ одноосной группы кристалловъ, къ квадратной и гексагональной.

306. На основаніи принадлежности плоскостей квадратной системы къ разнымъ зонамъ онѣ распадаются на три рода:

1. Плоскости, перпендикулярныя къ главной оси или къ изотропному поясу. Это будутъ плоскости (001) и $(00\bar{1})$.

2. Плоскости, параллельныя главной оси и принадлежащія къ изотропному поясу—$(hk0)$, (100), (010) и т. д. и

3. Плоскости, входящія въ ортогональныя зоны, но не входящія въ изотропный поясъ. Эти плоскости, наклонены къ главной оси.

Подобно тому, какъ мы наблюдали это раньше (§ 279 и др.) и здѣсь плоскости дѣлятся на нѣсколько группъ, и это дѣленіе отражается на наблюдаемыхъ въ тѣлѣ простыхъ формахъ. Точно также, какъ и въ моноклинической системѣ, и здѣсь никогда и ни при какомъ выборѣ координатныхъ или кристаллическихъ осей, плоскости, различно расположенныя къ одной изъ осей (къ главной), не могутъ давать одноименныхъ простыхъ формъ.

Но въ квадратной системѣ бо́льшая ея симметрія и существованіе въ ней главной оси сказывается въ томъ, что въ нѣкоторыхъ ея строеніяхъ нельзя произвольно — при перемѣнѣ координатъ или кристаллическихъ осей—мѣнять названія плоскостей одного и того же рода, а съ другой стороны въ томъ, что *простыя формы мѣняютъ свой характеръ, хотя число ихъ остается неизмѣннымъ* по сравненію съ простыми формами двуосныхъ системъ.

307. Дѣло въ томъ, что благодаря свойству боковыхъ осей X и Y (зависящему отъ физическаго характера главной оси), вся-

---

и $hu'+kv'+lw'=0$, гдѣ $[uvw]$—индексъ ребра R, а $[u'v'w']$ индексъ ребра BO. Очевидно h, k и l—простыя числа.

кое различіе отрѣзковъ по этимъ осямъ *исчезаетъ;* доматическія плоскости $(h0l)$ и $(0kl)$, которыя принадлежали въ двуосныхъ системахъ къ разнымъ простымъ формамъ, здѣсь могутъ принадлежать къ одной и той же простой формѣ. Такъ, напр., существованіе λ^4 вызываетъ связь (т. е. принадлежность къ одной простой формѣ) плоскостей черезъ 90^0, т. е. связь $(h0l)$ съ $(0hl)$, $(h0l)$ и $(0\bar{h}l)$ и т. д. То же самое наблюдается для пинакоидальныхъ формъ (100), (010) и т. п.

Такимъ образомъ нѣкоторыя изъ плоскостей, принадлежавшихъ раньше къ различнымъ простымъ формамъ здѣсь соединяются въ одну простую форму. Но, съ другой стороны, появляется новая возможность различенія въ положеніи плоскостей по отношенію къ координатнымъ плоскостямъ. Эта возможность вытекаетъ изъ свойствъ кристаллическихъ осей X и Y.

Эти оси, какъ мы видѣли (§ 302) идентичны. Слѣдовательно всѣ явленія по нимъ *сравнимы.* Отношенія какихъ-нибудь отрѣзковъ, по нимъ отсчитываемыхъ, остаются неизмѣнными — какъ бы ни мѣнялись тѣ внѣшнія условія среды, въ которыхъ находится данный поліэдръ. Поэтому, по отношенію къ характеристикамъ плоскостей по этимъ координатнымъ осямъ, можно вводить въ обсужденіе *равенство* или *различіе* этихъ характеристикъ (resp. равенство или различіе соотвѣтствующихъ имъ параметровъ). Очевидно, это можетъ касаться только пирамидальныхъ и призматическихъ плоскостей. Здѣсь мы встрѣчаемъ два случая: 1) плоскости, дѣлающія *равные* отрѣзки по X и Y—(hhl) и (110) и 2) плоскости, дѣлающія *разные* отрѣзки по X и Y—(hkl) и $(hk0)$. Очевидно, никакимъ способомъ, никакой перемѣной координатныхъ или кристаллическихъ осей, нельзя напр. плоскость (hkl) привести въ видъ (hhl) и т. д. Такимъ образомъ эти плоскости должны неизбѣжно принадлежать къ разнымъ простымъ формамъ.

308. Исходя изъ характера плоскостей (§ 306) и пользуясь только что указанными отношеніями, мы имѣемъ здѣсь слѣдующія 7 типовъ простыхъ формъ:

1) Изъ плоскостей
перваго рода..... 1) $\{001)$

2) Изъ плоскостей
втораго рода..... 2) $\{100\} = \{010\}$, 3) $\{110\}$, 4) $\{hk0\}$

3) Изъ плоскостей
третьяго рода ..... 5) $\{h0l\} = \{0hl\}$, 6) $\{hhl\}$, 7) $\{hkl\}$.

Конечно для каждой простой формы, возможно нѣсколько ея родовъ кромѣ тѣхъ плоскостей, характеристики которыхъ постоянны. Эти послѣднія простыя формы будутъ единственными въ своемъ родѣ, напр. $\{100\}$ или $\{110\}$. Сюда же должна быть отнесена $\{001\}$, но $\{001\}$ иногда распадается на $\{001\}$ и $\{00\bar{1}\}$.

309. Подобно тому, какъ мы это видѣли въ предыдущихъ системахъ, и здѣсь отдѣльныя строенія различаются по количеству плоскостей различныхъ простыхъ формъ, причемъ maximum ихъ наблюдается въ голоэдріи.

Удобнѣе всего оріентироваться въ этомъ свойствѣ простыхъ формъ разныхъ строеній, если выяснить себѣ, какія плоскости связываются между собою различными элементами симметріи, существующими въ этой системѣ.

Мы уже примѣняли этотъ пріемъ въ другихъ системахъ (§ 282, 295). Въ квадратной системѣ наблюдается одиннадцать разныхъ элементовъ симметріи — λ^4, $4L^2$, c, π, $4P$. Они связываютъ плоскости разныхъ простыхъ формъ слѣдующимъ образомъ:

Плоскости.	λ^4	$L^2 = X$.	$L^2 = Y$.	L^2 между X и Y.	L^2 между X и Y.	c	π	$P = XZ$.	$P = YZ$.	P между X и Y.	P между X и Y.
001	не связ.	$00\bar{1}$	$00\bar{1}$	$00\bar{1}$	$00\bar{1}$	$00\bar{1}$	$00\bar{1}$	не связываютъ.			
100	$\bar{1}00$. 010, $0\bar{1}0$	не св.	$\bar{1}00$	010	$0\bar{1}0$	$\bar{1}00$	не св.	не св.	$\bar{1}00$	010	$0\bar{1}0$
110	$1\bar{1}0$, $\bar{1}\bar{1}0$, $\bar{1}10$	$1\bar{1}0$	$\bar{1}10$	не св.	$\bar{1}\bar{1}0$	$\bar{1}\bar{1}0$	не св.	$1\bar{1}0$	110	не св.	$\bar{1}\bar{1}0$
$hk0$	$\bar{k}h0$, $\bar{h}\bar{k}0$, $k\bar{h}0$	$h\bar{k}0$	$\bar{h}k0$	$kh0$	$\bar{k}\bar{h}0$	$\bar{h}\bar{k}0$	не св.	$h\bar{k}0$	$\bar{h}k0$	$kh0$	$\bar{k}\bar{h}0$
$h0l$	$0hl$, $\bar{h}0l$, $0\bar{h}l$	$h0\bar{l}$	$\bar{h}0l$	$0hl$	$0\bar{h}\bar{l}$	$h0\bar{l}$	$h0\bar{l}$	не св.	$\bar{h}0l$	$0hl$	$0h\bar{l}$
hhl	$\bar{h}hl$, $h\bar{h}l$, $hh\bar{l}$	hhl	$hh\bar{l}$	$hh\bar{l}$	$hh\bar{l}$	$hh\bar{l}$	$hh\bar{l}$	$h\bar{h}l$	$\bar{h}hl$	не св.	$\bar{h}\bar{h}\bar{l}$
hkl	$\bar{k}hl$, $\bar{h}\bar{k}l$, $k\bar{h}l$	$h\bar{k}\bar{l}$	$\bar{h}k\bar{l}$	$kh\bar{l}$	$\bar{k}\bar{h}\bar{l}$	$\bar{h}\bar{k}\bar{l}$	$hk\bar{l}$	$h\bar{k}\bar{l}$	$\bar{h}kl$	khl	$\bar{k}\bar{h}l$

Въ этой таблицѣ помѣщены только отдѣльныя плоскости каждаго рода и каждой простой формы, но, очевидно, для другихъ подобныхъ даннымъ плоскостей, мы легко напишемъ и найдемъ связь ихъ по аналогіи съ приведенными; напр. (010) по аналогіи съ (100):

010 $\bar{1}00$, 100, $0\bar{1}0$ $0\bar{1}0$ не св. 100 $\bar{1}00$ $0\bar{1}0$ не св. $0\bar{1}0$ не св. 100 $\bar{1}00$

точно также khl по аналогіи съ (hkl) и (khl)

khl $\bar{h}kl$, $\bar{k}\bar{h}l$, $h\bar{k}l$ $k\bar{h}\bar{l}$ $\bar{k}h\bar{l}$ $hk\bar{l}$ $\bar{h}\bar{k}\bar{l}$ $\bar{k}\bar{h}\bar{l}$ $kh\bar{l}$ $k\bar{h}l$ $\bar{k}hl$ hkl $\bar{h}\bar{k}l$ и т. д.

310. Пользуясь этой таблицей можно легко получить всѣ простыя формы системы, если только принять во вниманіе *количество* возможныхъ плоскостей съ одинаковыми характеристиками; конечно, одинаковыми должны считаться такія характеристики, какъ напр. (hkl) и (khl) или (123) и (213) или (100) и (010) —такъ какъ оси X и Y идентичны. Вслѣдствіе симметріи системы (§ 302) обѣ такихъ плоскости должны всегда встрѣчаться одновременно.

Принимая это во вниманіе — мы находимъ, что мыслимы слѣдующія плоскости одинаковыхъ характеристикъ для каждой изъ семи простыхъ формъ:

1) двѣ . . . . . : (001) и $(00\bar{1})$
2) четыре . . . . : (100), (010), (100) и $(0\bar{1}0)$
3) » . . . . : (110), (110), (110) » $(\bar{1}10)$
4) восемь . . . . : $(hk0)$, $(h\bar{k}0)$, $(hk0)$, $(\bar{h}\bar{k}0)$, $(kh0)$, $(k\bar{h}0)$, $(\bar{k}h0)$ и $(\bar{k}\bar{h}0)$
5) » . . . . : $(h0l)$, $(\bar{h}0l)$, $(h0\bar{l})$, $(\bar{h}0\bar{l})$, $(0hl)$, $(0\bar{h}l)$, $(0h\bar{l})$ » $(0\bar{h}\bar{l})$
6) » . . . . : $(11l)$, $(\bar{1}1l)$, $(11\bar{l})$, $(\bar{1}\bar{1}l)$, $(11l)$, $(\bar{1}1l)$, $(11\bar{l})$, $(\bar{1}1\bar{l})$ » $(\bar{1}\bar{1}\bar{l})$
7) шестнадцать : (hkl), $(\bar{h}kl)$, $(hk\bar{l})$, $(\bar{h}k\bar{l})$, $(h\bar{k}l)$, $(\bar{h}\bar{k}l)$, $(h\bar{k}\bar{l})$, $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ » $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$,
(khl), $(\bar{k}hl)$, (khl), $(kh\bar{l})$, $(k\bar{h}l)$, $(\bar{k}\bar{h}l)$, $(\bar{k}h\bar{l})$ » $(\bar{k}\bar{h}\bar{l})$.

Очевидно, пользуясь таблицей § 309 можно вывести, при какихъ символахъ симметріи существуетъ нѣсколько родовъ простыхъ формъ одинаковыхъ характеристикъ.

311. До извѣстной степени простыя формы квадратной системы могутъ мѣнять свои названія и свои индексы въ зависимости отъ перемѣны координатъ. Выборъ координатныхъ осей—даже при точномъ соблюденіи относящихся къ нему правилъ—подчиненъ нѣкоторому произволу. Мы можемъ выбрать координатныя оси различно. Эти различные выборы координатныхъ осей мы называемъ разными *постановками* кристалла. Только въ строеніи $\lambda^2\ 2L^2\ 2P'$ направленія этихъ осей неизмѣнны ($\lambda^2 = Z$, $2L^2 = X$ и Y).

Въ голоэдріи, въ строеніи $\lambda^4\ 4L^2\ \lambda^4\ 4P$ мы имѣемъ *двѣ* постановки, такъ какъ въ ней есть $4L^2$ или $4.I^1$— а только двѣ изъ нихъ принимаются за координатныя оси X и Y. Легко сообразить (рис. 99), что при одной постановкѣ (оси X и Y) $\{110\}$ превращается въ $\{100\}$ при другой (оси X' и Y'); точно тоже мы имѣемъ и для $\{11l\}$. Именно, $\{11l\}$ одной постановки равна $\{10l\}$ другой. Всѣ другія формы опредѣленнымъ образомъ, совершенно правильно, мѣняютъ

свои индексы благодаря тому, что при такой перемѣнѣ координатъ новыя оси X' и Y' дѣлаютъ уголъ въ 45^0 со старыми осями.

Въ прочихъ строеніяхъ ($\lambda^4 c\pi$, $Л^4$, λ^4) постановка болѣе произвольна и мы можемъ ставить кристаллъ, выбирая за оси X и Y любыя ребра, лежащія въ плоскости, перпендикулярной къ оси Z; слѣдовательно мы можемъ имѣть здѣсь безчисленное множество постановокъ.

312. На основаніи таблицы § 309, можно вывести всѣ простыя формы различныхъ кристаллическихъ строеній. Выводъ данъ въ таблицѣ на стр. 306, 307.

313. Въ этой таблицѣ звѣздочками обозначены тѣ немногія простыя формы, которыя являются *закрытыми*. Такими являются: 1) квадратныя пирамиды (въ строеніяхъ: $\lambda^4 4L^2 c\pi 4P$, $\lambda^4 c\pi$, $\lambda^4 4L^2$, $\lambda^4 c\pi$, $\lambda^2 2L^2 2P'$), 2) сфеноиды (въ строеніяхъ $\lambda^2 2L^2 2P'$ и $Л^4$), 3) скаленоэдры ($\lambda^2 2L^2 2P'$), 4) биквадратныя пирамиды ($\lambda^4 4L^2 c\pi 4P$) и

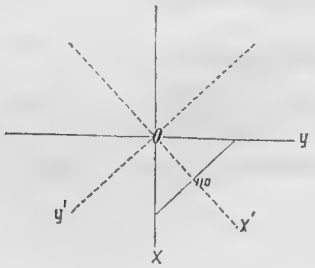


Рис. 99.

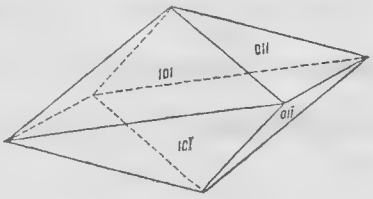


Рис. 100.

5) трапецоэдры ($\lambda^4 4L^2$). Изъ этихъ простыхъ формъ только 3 первыхъ встрѣчаются въ свободномъ состояніи, но все же наблюдаются не часто. Наичаще встрѣчаются пирамиды $\{hhl\}$, $\{h0l\}$, $\{hkl\}$, извѣстныя для очень многихъ веществъ—для нѣкоторыхъ изъ которыхъ (напр. для вольфрамовокислыхъ солей кальція, барія, стронція и др. (строеніе $\lambda^4 c\pi$), кислыхъ яблочно-кислыхъ солей марганца, мѣди и т. д. (строеніе $\lambda^4 4L^2$) и т. д.) онѣ очень характерны. Форма ихъ мѣняется въ зависимости отъ ихъ индекса и отъ формы ячейки даннаго тѣла. Такова напр. тупая пирамида $\{101\}$ (рис. 100), обычная для циркона, ($\lambda^4 4L^2 c\pi 4P$), изъ нѣкоторыхъ копей Ильменскихъ горъ, описанная Н. И. Кокшаровымъ, при $a:c=0.6404$ (Купфферъ 1825) или острая пирамида $\{111\}$ шеелита ($\lambda^4 c\pi$) (рис. 101) при

	Голоэдрія $\lambda^4 4L^2$ сп $4P$	λ^4 сп	$\lambda^4 4L^2$
1.	{hkl}—*Биквадратная пирамида [1]) 16 пл.	{hkl}—*Пирамида 3-го рода [2]) 8 пл. {khl}—*Пирамида 3-го рода [2]) 8 пл.	{hkl}—*Трапецоэдръ 8 пл. {hkl}—*Трапецоэдръ 8 пл.
2.	{$11l$} *Пирамида 1-го рода 8 пл. [2]).	{$11l$}—*Пирамида 1-го рода [2]) 8 пл.	{$11l$}—*Пирамида 1-го р.[2]) 8 пл.
3.	{$10l$}—*Пирамида 2-го рода 8 пл. [2]).	{$10l$}—*Пирамида 2-го рода [2]) 8 пл.	{$10l$}—*Пирамида 2 р.[2]) 8 пл.
4.	{$hk0$}— Биквадратная призма 8 пл. [3])	{$hk0$}— Призма 3-го рода 4 пл. {$kh0$}— Призма 3-го рода 4 пл.	{$hk0$}— Биквадратн. призма [3]) 8 пл.
5.	{110}— Призма 1-го рода 4 пл.	{110}— Призма 1-го рода 4 пл.	{110}— Призма 1-го рода 4 пл.
6.	{100}— Призма 2-го рода 4 пл.	{100}— Призма 2-го рода 4 пл.	{100}— Призма 2-го рода 4 пл.
7.	{001}— Пинакоидъ [4]) 2 пл.	{001}—Пинакоидъ [4]) 2 пл.	{001}— Пинакоидъ [4]) 2 пл.)

$a:c = 1.5356$ (по Дауберу 1859), наблюдавшаяся напр. въ шеелитахъ изъ Харанта Хохъ на Кавказѣ (В. Орловскій и С. Поповъ 1898) и т. д.

Свободные сфеноиды и скаленоэдры наблюдались до сихъ поръ только въ одномъ веществѣ, въ кристаллахъ мѣднаго колчедана ($\lambda^2 2L^2 2P'$), и то очень рѣдко, таковы напр. рис. 102 сфеноидъ {332}

---

[1]) *Г*—дитетрагональная бипирамида.

[2]) *Г*—тетраг. бипирамида 1-го рода, resp. 2-го рода, resp. 3-го рода.

[3]) *Г*—дитетрагон. призма.

[4]) *Г*—базисъ.

[5]) *Г*—дитетрагон. пирамида.

[6]) *Г*—верхній, resp. нижній базисы.

[7]) *Г*—бисфеноидъ, 1-го рода, resp. 2-го или 3 рода.

*— Замкнутыя формы.

$\lambda^4 4P$	$\lambda^2 2L^2 2P'$	λ^4	Π^4
$\{hkl\}$ —Биквадратная пирамида 8 пл.[5])	$\{hkl\}$ —*Скаленоэдръ 8 пл.	$\{hkl\}$ —Пирамида 3-го р. 4 пл.	$\{hkl\}$ —*Сфеноидъ [7]) 3-го р. 4 пл.
$\{hk\bar{l}\}$ —Биквадратн. пирамида 8 пл.[5])	$\{h\bar{k}l\}$ —*Скаленоэдръ 8 пл.	$\{khl\}$ —Пирамида 3-го р. 4 пл.	$\{h\bar{k}l\}$ —*Сфеноидъ [7]) 3-го р. 4 пл.
		$\{hk\bar{l}\}$ —Пирамида 3-го р. 4 пл.	$\{khl\}$ —*Сфеноидъ [7]) 3-го р. 4 пл.
		$\{kh\bar{l}\}$ —Пирамида 3-го р. 4 пл.	$\{k\bar{h}l\}$ —*Сфеноидъ [7]) 3-го р. 4 пл.
$\{11l\}$ —Пирамида 1-го р. 4 пл.	$\{11l\}$ —*Сфеноидъ [7]) 4 пл.	$\{11l\}$ —Пирамида 1-го р. 4 пл.	$\{11l\}$ —*Сфеноидъ [7]) 1-го р. 4 пл.
$\{11\bar{l}\}$ —Пирамида 1-го р. 4 пл.	$\{1\bar{1}l\}$ —*Сфеноидъ [7]) 4 пл.	$\{1\bar{1}l\}$ —Пирамида 1-го р. 4 пл.	$\{1\bar{1}l\}$ —*Сфеноидъ [7]) 1-го р. 4 пл.
$\{10l\}$ —Пирамида 2-го р. 4 пл.	$\{10l\}$ —*Пирамида [2]) 2-го р. 8 пл.	$\{10l\}$ —Пирамида 2-го р. 4 пл.	$\{10l\}$ —*Сфеноидъ [7]) 2-го р. 4 пл.
$\{10\bar{l}\}$ —Пирамида 2-го р. 4 пл.		$\{10\bar{l}\}$ —Пирамида 2-го р. 4 пл.	$\{01l\}$ —*Сфеноидъ [7]) 4 пл.
$\{hk0\}$ —Биквадратн. призма [3]) 8 пл.	$\{hk0\}$ — Биквадратн. призма [3]) 8 пл.	$\{hk0\}$ —Призма 3-го р. 4 пл.	$\{hk0\}$ — Призма 3-го р. 4 пл.
		$\{kh0\}$ —Призма 3-го р. 4 пл.	$\{kh0\}$ — Призма 3-го р. 4 пл.
$\{110\}$ —Призма 1-го р. 4 пл.	$\{110\}$ — Призма 1-го р. 4 пл.	$\{110\}$ —Призма 1-го р.	$\{110\}$ — Призма 1-го р.
$\{100\}$ —Призма 2-го р. 4 пл.	$\{100\}$ — Призма 2-го р.	$\{100\}$ —Призма 2-го р.	$\{100\}$ — Призма 2-го р.
$\{001\}$ —Пинакоидъ [6]) 1 пл.	$\{001\}$ — Пинакоидъ [6]) 2 пл.	$\{001\}$ —Пинакоидъ [6]) 1 пл.	$\{001\}$ — Пинакоидъ [6]) 2 пл.
$\{00\bar{1}\}$ —Пинакоидъ [6]) 1 пл.		$\{00\bar{1}\}$ —Пинакоидъ [6]) 1 пл.	

для халькопирита изъ Честера въ Пенсильваніи по Пенфильду (1890) при отношеніи осей $a:c = 0.9852$ (Гайдингеръ 1823).

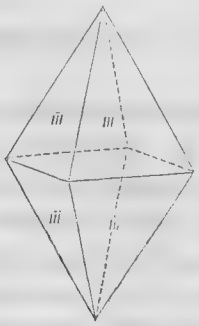


Рис. 101.

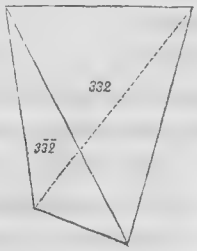


Рис. 102.

Еще менѣе точно установлено самостоятельное существованіе

скаленоэдра. Описанные не разъ, напр. Шимперомъ (1878) или Майеромъ (1888), скаленоэдры мѣднаго колчедана сильно изуродованы; ихъ индексы не могли быть точно установлены. Какъ примѣръ можно привести {321} халькопирита (рис. 103), къ которому приближались нѣкоторыя изъ этихъ формъ.

Изъ двухъ другихъ закрытыхъ простыхъ формъ квадратной системы наблюдалась лишь *биквадратная пирамида*, которая изрѣдка является господствующей формой въ комбинаціяхъ циркона или оловяннаго камня. Такова напр. {321} оловяннаго камня изъ Корнваллиса, наблюдавшаяся Филлипсомъ (1814), рис. 104 — гдѣ $Z=\{321\}$, $s=\{111\}$ и $m=\{110\}$ при $a:c=0.9623$ (Беккэ 1877). Если бы она развилась отдѣльно, она дала бы форму рис. 105.

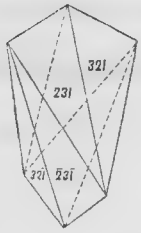


Рис. 103.

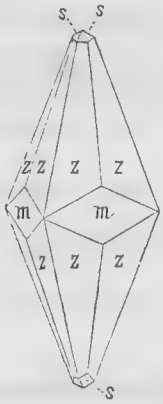


Рис. 104.

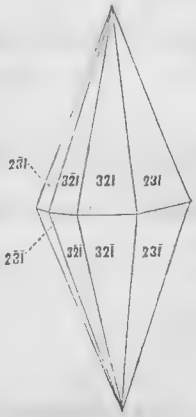


Рис. 105.

Трапецоэдръ никогда не наблюдался ни въ простомъ видѣ, ни въ комбинаціяхъ.

314. Среди простыхъ формъ квадратной системы мы имѣемъ рядъ энантіоморфныхъ и гемиморфныхъ тѣлъ. Но физическія свойства такихъ формъ очень мало изучены, хотя должны быть различны для поліэдровъ одинаковыхъ характеристикъ. Ибо въ энантіоморфныхъ строеніяхъ (§ 209) квадратной системы, подобно тому какъ это наблюдается въ аналогичныхъ случаяхъ (ср. напр. § 337), плоскости одинакового индекса, перпендикулярныя къ посолоннымъ и противусолоннымъ векторамъ, различны для всѣхъ тѣхъ явленій, свойства которыхъ изслѣдуются въ этихъ плоскостяхъ (т. е. для свѣтовыхъ, электриче-

скихъ, магнитныхъ, явленій вытравленія, двойниковыхъ и т. п.). Къ сожалѣнію эти свойства здѣсь совсѣмъ почти не изучены, кромѣ немногихъ явленій вытравленія, съ которыми мы ознакомимся ниже.

315. Вещества квадратной системы являются наименѣе распространенной группой тѣлъ. Хотя въ нее входитъ 7 кристаллическихъ строеній, тогда какъ въ моноклинической ихъ всего 3—но количество веществъ, кристаллизующихся въ моноклинической системѣ въ нѣсколько разъ превышаетъ количество веществъ квадратной (§ 341). Среди послѣднихъ преобладаютъ вещества голоэдрическаго отдѣленія, описанныя и изслѣдованныя уже де-Ромэ Делилемъ (1783) и выдѣленныя въ отдѣльную группу Бернгарди (1809). Какъ примѣръ комбинацій этого отдѣленія можно привести рис. 106 — *вилуитъ* изъ р. Вилуя, Якутской области по Н. И. Кокшарову (1855), гдѣ $a\{100\}$, $m\{110\}$, $c\{001\}$ и $p\{111\}$ — причемъ $a:c=0.5375$ по Цефаровичу (1864), или рис. 107—*цирконъ* изъ Ильменскихъ горъ по Н. И. Кокшарову (1858) гдѣ $a\{100\}$, $M\{110\}$ и $x\{311\}$, причемъ $a:c=0.6404$ (ср. рис. 100).

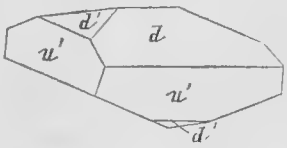


Рис. 108.

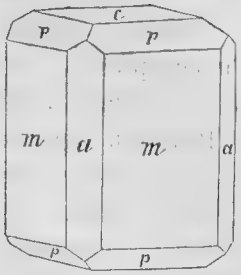


Рис. 106.

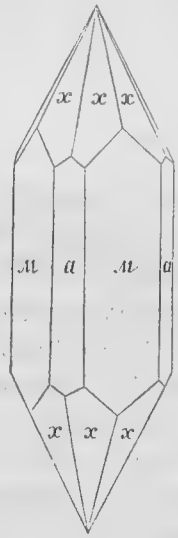


Рис. 107.

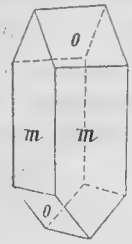


Рис. 109.

316. Геміэдріи изучены очень плохо. Въ 1818 г. Брейтгауптъ, указалъ, что мѣдный колчеданъ даетъ сфеноиды квадратной системы, ясно отличные отъ тетраэдровъ, т. е. установилъ первый случай

вещества *строенія* $\lambda^2\, 2L^2\, 2P'$ [1]). Однако только въ 1823 году, послѣ работъ Гайдингера, вторично установившаго тотъ же фактъ независимо отъ Брейтгаупта, существованіе въ природѣ класса $\lambda^2\, 2L^2\, 2P'$ вошло въ общее сознаніе. Съ тѣхъ поръ стали извѣстными еще нѣсколько веществъ этого строенія. Какъ примѣръ относящихся сюда комбинацій можно взять рис. 108 *халькопирита* изъ гр. Ульстеръ по Задебеку (1868), гдѣ $d=\{114\}$, $d'=\{1\bar{1}4\}$ и $u'=\{4\bar{4}1\}$, причемъ $a:c=0.9852$ (Гайдингеръ 1825) (ср. рис. 102—103) и рис. 109—комбинація соединенія $Ag\,NO_2.NH_3$ по Фокку (1890), гдѣ $m=\{110\}$ и $o\,\{111\}$, причемъ $a:c=0.6086$.

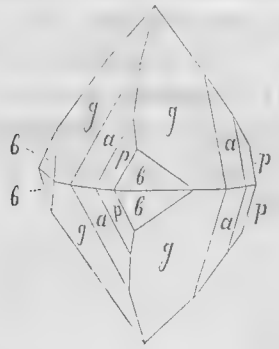


Рис. 110.

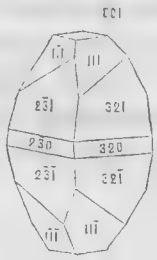


Рис. 111.

Еще медленнѣе подвигалось выясненіе строенія веществъ, кристаллизующихся въ другихъ геміэдріяхъ. Наиболѣе распространенное (послѣ голоэдріи) *строеніе* $\lambda^4 c\,\pi$ — было замѣчено впервые въ 1824 году Мосомъ на кристаллахъ *шеелита* и вскорѣ же правильно объяснено Гесселемъ (1830). Какъ примѣръ комбинацій этого строенія могутъ служить рис. 110—*шеелитъ* изъ Рудныхъ горъ по Мосу (1824), гдѣ $g=\{101\}$, $a=\{313\}$, $p=\{111\}$, $b=\{131\}$, причемъ $a:c=1.5359$ по Дауберу (1859) (ср. рис. 101) и рис. 111 *фергюсонита* изъ Гренландіи по Гайдингеру (1826), комбинація $\{321\}$, $\{111\}$, $\{001\}$, причемъ $a:c=1.4643$ (Миллеръ 1852).

Слѣдующее *строеніе* λ^4 было впервые замѣчено Науманномъ, въ

---

[1]) Онъ относилъ въ то же строеніе анатазъ, кристаллическая структура котораго до сихъ поръ неясна.

1835 году, на кристаллахъ *вульфенита* ($PbMoO_4$) — но Науманнъ считалъ случайностію гемиморфизмъ по оси Z и правильно это строеніе было впервые объяснено Гадолинымъ въ 1866 году. Какъ примѣръ его многогранниковъ можно привести рис. 113 — *вульфенита* изъ Берггисгюбеля по Науманну (1835), гдѣ $o=\{111\}$, $w=\{11\bar{1}\}$, $\sigma=\{31\bar{1}\}$, $x=\{432\}$, $\varepsilon=\{10\bar{1}\}$, причемъ $a:c=1.5777$ (Кохъ 1881) и рис. 112 *праваго виннокислаго антимонилъ-барія* по В. И. Мамонтову (1896), комбинація $\{110\}.\{100\}.\{111\}.\{11\bar{1}\}.\{201\}.\{311\}$, причемъ $a:c=0.4406$ (Траубэ 1892).

317. *Строеніе* $\lambda^4 4L^2$ впервые наблюдалось Деклуазо въ 1857 году на кристаллахъ *сѣрнокислаго стрихнина*. Деклуазо не наблюдалъ ни-

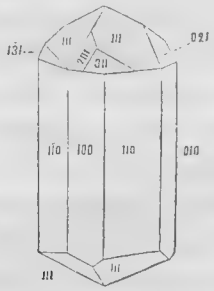


Рис. 112.

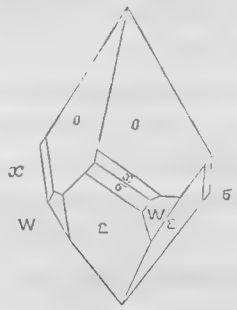


Рис. 113.

какихъ отклоненій геометрической формы кристалловъ отъ тѣлъ голоэдріи, но нашелъ, что они вращаютъ плоскость поляризаціи свѣта; поэтому, по аналогіи съ кварцемъ, онъ предположилъ для нихъ строеніе $\lambda^4 4L^2$. Впервые же такая ихъ структура была доказана въ 1881 году Баумгауэромъ путемъ наблюденія фигуръ вытравленія. Съ тѣхъ поръ было найдено еще нѣсколько веществъ этого класса, но ни для одного изъ нихъ не наблюдалось въ формѣ многогранника отклоненій отъ голоэдріи. Это, отчасти, и понятно, такъ какъ все отличіе $\lambda^4 4L^2$ отъ $\lambda^4 4L^2 c\, 4P\pi$—сводится на различіе пирамидальныхъ формъ $\{hkl\}$ (см. § 312). Разъ только эти формы не развиты—многогранники этого строенія не отличимы отъ голоэдріи. Какъ примѣръ вещества сюда относящагося, можно привести рис. 114—*сѣрнокислаго этилендіамина* по В. фонъ Лангу (1872),—комбинація $\{221\}.\{001\}$, причемъ $a:c=1{,}4943$.

Наконецъ, послѣднее строеніе, сюда относящееся, представляютъ *гемиморфные кристаллы*—$\lambda^4 4P$. Впервые принадлежащіе къ нему по-

ліэдры были описаны Мариньякомъ въ 1857 г. для кристалловъ фтористаго серебра—$AgF.H_2O$, но въ его изслѣдованіи не была исключена возможность принадлежности этого вещества къ строенію λ^4 и даже $Л^4$, такъ какъ наблюдались только формы $\{110\}$ и $\{hkl\}$. Въ 1869 г. Гротъ изучилъ второе вещество этого строенія—*іодсукцинимидъ* и для него въ 1894 году изслѣдованіями Траубэ вполнѣ доказана структура, соотвѣтствующая классу $\lambda^4 4P$ (рис. 115, по Траубэ, причемъ $o=\{221\}$, $v=\{221\}$, $v'=\{11\bar{1}\}$; $m=\{110\}$, гдѣ $a:c=0.8733$ (Гротъ).

Существованіе веществъ строенія $Л^4$ съ точностію не доказано. Одно время сюда относили кристаллы *мочевины* (Гротъ 1895), но изслѣдованія Меца (1901) доказали, что это вещество принадлежитъ скорѣе къ строенію $\lambda^2\, 2L^2\, 2P'$ [1]).

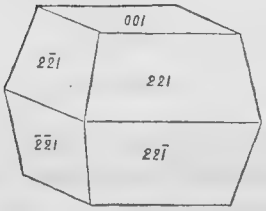


Рис. 114.

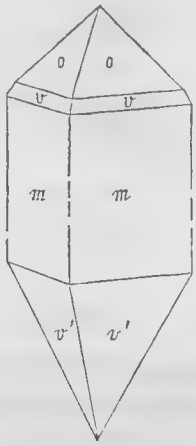


Рис. 115.

318. Гексагональная система. Къ гексагональной системѣ относится наибольшее количество строеній, хотя вещества этой системы во много разъ рѣже наблюдаются, чѣмъ тѣла любой изъ системъ двуосной группы. Здѣсь всѣ зоны, кромѣ одной изотропной (§ 253), ортогональны, такъ же какъ и въ квадратной системѣ.

Сюда относятся 12 строеній (§ 127): 1) голоэдрія $\lambda^6\, 6L^2c\, \pi\, 6P$, 2) $\lambda^3\, 3L^2c\, 3P$, 3) $\lambda^6 c\, \pi$, 4) $\lambda^6\, 6L^2$, 5) $\lambda^3\, 3L^2\, \pi\, 3P'$, 6) $\lambda^6\, 6P$, 7) λ^6, 8) $\lambda^3\, 3L^2$, 9) $\lambda^3 c$, 10) $\lambda^3 \pi$, 11) λ^3 и 12) $\lambda^3\, 3P$. Большинство изъ

[1]) Впрочемъ, даже принадлежность кристалловъ мочевины къ квадратной системѣ, вызываетъ нѣкоторыя сомнѣнія (Гадолинъ 1869).

этихъ строеній встрѣчены въ природѣ [1]), а многія — какъ напримѣръ $\lambda^3\, 3L^2c\, 3P$ — довольно обычны.

Подобно тому, какъ это наблюдается для квадратной системы (§ 299) и здѣсь мы имѣемъ одно направленіе рѣзко выдѣляющееся по своимъ свойствамъ отъ прочихъ направленій кристалла. Оно всегда совпадаетъ съ λ^3; мы будемъ принимать его за ось Z и называть *главной осью* кристалла (ср. § 300). Это ось изотропной зоны, причемъ $\varphi = 60^0$.

Поэтому и геометрическія свойства этой оси отличны отъ тѣхъ явленій, какія наблюдаются въ квадратной системѣ. Правда, для физическихъ явленій, выражаемыхъ закономъ эллипсоида (§ 128) и здѣсь Z есть L^∞.

Но для другихъ свойствъ идентичные векторы расположены иначе, чѣмъ вокругъ главной оси квадратной системы. Во всѣхъ строеніяхъ гексагональной системы векторы, одинаково наклоненные къ Z, совпадаютъ другъ съ другомъ (т. е. идентичны) при поворотѣ на 120^0; это зависитъ отъ свойствъ $\lambda^3 = Z$, существующей во всѣхъ тѣлахъ гексагональной системы. Слѣдовательно, въ одной и той же плоскости, проходящей черезъ $\lambda^3 = Z$, два вектора, одинаково наклоненные къ Z, не связаны между собою этимъ элементомъ симметріи, т. е. не идентичны.

Однако это наблюдается далеко не всегда. Во всѣхъ строеніяхъ обладающихъ L^6 и въ нѣкоторыхъ другихъ (напр. въ $\lambda^3\, 3L^2\, 3P'\pi$) въ этомъ отношеніи наблюдается сходство съ квадратной системой; здѣсь, подобно послѣдней, векторы, лежащіе въ одной плоскости и наклоненные подъ однимъ и тѣмъ же угломъ къ Z идентичны [2]). Но здѣсь такія пары векторовъ повторяются не 4 раза, а 6 разъ въ пространствѣ.

---

[1]) Любопытно сравнить съ этой точки зрѣнія успѣхи нашего познанія съ 1830 года, когда всѣ эти 12 строеній теоретически были выведены Гесселемъ. Гесселю были извѣстны среди изученныхъ въ его время кристалловъ примѣры многогранниковъ только для 6 (можетъ быть для 7) строеній; для остальныхъ же шести въ его время не наблюдалось еще ни одного вещества. Гадолинъ, въ 1869, зналъ въ природѣ то же только 7 строеній, а теперь изъ теоретически возможныхъ 12 строеній намъ извѣстно съ несомнѣнностію 10.

[2]) Нѣкоторые изслѣдователи (напр. Малляръ, Гротъ и др.) относятъ къ *гексагональной* системѣ только эти послѣднія строенія или строенія, обладающія L^6, а всѣ другіе, соединяютъ въ особую *ромбоэдрическую систему*. Такое раздѣленіе не имѣетъ никакихъ практическихъ удобствъ; теоретически безразлично, соединять ли всѣ эти строенія въ одну или въ двѣ системы.

319. Изъ такого строенія гексагональныхъ веществъ вытекаетъ удобство пользоваться для геометрическаго обозначенія ихъ многогранниковъ не тремя, а четырмя координатными осями (§ 126). Конечно, съ чисто геометрической точки зрѣнія четвертая ось является лишней и ненужной — точно такъ, какъ для геометра лишнимъ и ненужнымъ усложненіемъ кажутся тѣ *косыя* координатныя оси, которыми мы пользовались въ системахъ моноклинической и триклинической. Однако, только при употребленіи этихъ косыхъ осей проявляются оригинальныя и своеобразныя правильности въ геометрическихъ свойствахъ кристаллическихъ многогранниковъ, которыя выражаются въ законѣ Гаюи. Всѣ усложненія, какія вносятся при этомъ въ формулы уравненій плоскостей и т. д., вполнѣ окупаются тѣмъ, что координатныя оси имѣютъ реальное физическое значеніе и что съ ними тѣсно связано распредѣленіе въ пространствѣ всѣхъ другихъ элементовъ многогранника.

Совершенно то же *физическое* значеніе въ гексагональной системѣ имѣетъ предложенная Вейссомъ (§ 126) система четырехъ координатныхъ осей, причемъ за Z выбирается λ^3, а три другихъ оси лежатъ перпендикулярно къ Z и дѣлаютъ между собою углы въ 120°. Такъ выбранныя координатныя оси вполнѣ соотвѣтствуютъ основной чертѣ строенія веществъ гексагональной системы, выражаютъ общее для нихъ всѣхъ свойство ихъ главной оси. Только при такомъ выборѣ координатныхъ осей индексы плоскостей одной и той же простой формы обладаютъ одинаковыми характеристиками и не нарушается симметрія въ обозначеніи плоскостей и простыхъ формъ.

320. При такомъ обозначеніи, характеристика по третьей боковой оси, конечно, находится въ полной зависимости отъ характеристикъ по двумъ другимъ и можетъ быть получена ихъ сложеніемъ, т. е. зная характеристики по X и Y, мы знаемъ и характеристику по оси U (§ 162).

Поэтому всѣ различныя законности, которыя мы наблюдали въ индексахъ съ 3-мя характеристиками, цѣликомъ приложимы къ данному случаю. Такъ, индексъ оси зонъ выводится изъ трехъ характеристикъ только по осямъ X, Y и Z гексагональной системы совершенно такъ же, какъ мы это имѣли для тѣлъ съ тремя координатными осями (§ 164).

Точно также, соотвѣтственно, и ячейка гексагональной системы

вполнѣ опредѣляется этими тремя осями. Она состоитъ изъ параллелипипеда, два сѣченія котораго (перпендикулярныя къ Z) будутъ ромбами, параметры которыхъ равны a и образуютъ между собою углы въ 120^0 и 60^0; четыре же остальныхъ грани ячейки образованы прямоугольниками, стороны которыхъ равны a и c. [1]).

Такимъ образомъ всѣ наши разсужденія о явленіяхъ пояснаго распредѣленія плоскостей и о пространственныхъ рѣшеткахъ въ кристаллѣ совершенно не мѣняются отъ выбора четырехъ координатныхъ осей вмѣсто обычныхъ трехъ.

Совершенно также сохраняются неизмѣнными и тѣ обозначенія, какія мы даемъ плоскостямъ въ зависимости отъ ихъ положенія по отношенію къ координатнымъ осямъ (§ 157).

321. Разсматривая эти плоскости, можно рѣзко различать нѣсколько ихъ *родовъ* въ зависимости отъ ихъ положенія по отношенію къ главной оси, какъ это мы наблюдали уже въ квадратной системѣ. Характеръ ихъ зонъ аналогиченъ квадратной (§ 306).

При этомъ плоскости одного рода могутъ въ нѣкоторыхъ строеніяхъ системы (если нѣтъ въ ней другихъ элементовъ симметріи, вызывающихъ между ними особыя соотношенія) совершенно произвольно получать различныя характеристики и принадлежать то къ пирамидальнымъ или доматическимъ, то къ призматическимъ или пинакоидальнымъ формамъ; но плоскости разнаго рода никогда никакими перемѣнами координатныхъ или кристаллическихъ осей, не могутъ переходить другъ въ друга.

Мы наблюдаемъ здѣсь плоскости слѣдующихъ трехъ родовъ:

1) Перпендикулярныя къ главной оси—(0001), $(000\bar{1})$.

2) Параллельныя главной оси—$(hk\bar{i}0)$, $(1\bar{1}00)$, $(11\bar{2}0)$ и т. д. (изотропная зона—ср. § 304).

3) Наклонныя къ главной оси—$(hk\bar{i}l)$, $(1\bar{1}0l)$ и т. д.

322. Подобно тому, какъ мы это видѣли въ квадратной системѣ и здѣсь всѣ боковыя оси равнозначны т. е. отличія между разными доматическими или пирамидальными плоскостями исчезаютъ. Благодаря свойству Z, какъ λ^3, каждый векторъ черезъ 120^0 имѣетъ въ тѣлѣ новый векторъ, себѣ идентичный; понятно, поэтому, что три плоскости, перпендикулярныя къ тремъ такимъ векторамъ, неизбѣжно

---

[1]) Конечно a и c составляютъ кристаллическія оси.

всегда будутъ принадлежать къ одной и той же простой формѣ; если въ простую форму входитъ плоскость, параллельная одной боковой оси, то неизбѣжно въ той же простой формѣ будутъ находиться двѣ плоскости параллельныя двумъ другимъ боковымъ осямъ и т. д. Вслѣдствіе этого и здѣсь, въ гексагональной системѣ, какъ и въ квадратной, различіе граней,—т. е. принадлежность ихъ къ разнымъ простымъ формамъ — въ значительной степени сводится на *равенство* или *неравенство* отрѣзковъ, которыя дѣлаютъ плоскости на боковыхъ координатныхъ осяхъ (resp. на равенство или неравенство ихъ характеристикъ по этимъ осямъ).

Но въ эти равенства и неравенства вносятся значительныя измѣненія свойствами координатныхъ осей гексагональной системы, главнымъ образомъ оси $Z = \lambda^3$.

Исходя изъ трехъ родовъ плоскостей гексагональной системы (§ 321) въ связи съ равенствомъ или неравенствомъ ихъ отрѣзковъ по боковымъ осямъ, мы имѣемъ слѣдующія возможныя 7 типовъ плоскостей, соединяющихся въ разныя простыя формы:

Для *плоскостей 1-го рода*—одинъ типъ—$\{0001\}$, $\{000\bar{1}\}$.

Для *плоскостей 2-го рода* можно различить *три типа*:

Во первыхъ а) плоскости пересѣкаютъ *всѣ* три боковыя оси напр. $(hk\bar{i}0)$ и 2) плоскости параллельны одной изъ боковыхъ осей.

Въ первомъ случаѣ возможно два разныхъ типа плоскостей: или онѣ дѣлаютъ различные отрѣзки по всѣмъ тремъ боковымъ осямъ (напр. плоскость AC—рис. 113) $(hk\bar{i}0)$ или по двумъ осямъ отрѣзки равны (напр. плоскость $A'D$—рис. 113). Въ этомъ послѣднемъ случаѣ изъ свойствъ гексагона ясно слѣдуетъ, что параметры плоскости равны $1 : 1 : \frac{1}{2}$ [1]). Ея индексъ будетъ $(11\bar{2}0)$.

Во второмъ случаѣ возможно только одно положеніе плоскости: если плоскость параллельна боковой оси, то по двумъ другимъ ближайшимъ осямъ она будетъ дѣлать равные отрѣзки, (напр. BH—

---

[1]) Изъ треугольника ZBE слѣдуетъ, что $BZ : ZE = Sin\ 90^0 : Sin\ 30^0$, т. е. $ZE = \frac{BZ}{2}$. Если мы примемъ $BZ = ZF$ за 1, то EZ — (т. е. отрѣзокъ по третьей оси) равенъ $\frac{1}{2}$.

рис. 113). Это вытекаетъ изъ свойствъ гексагона. Ея индексъ будетъ $(10\bar{1}0)$.

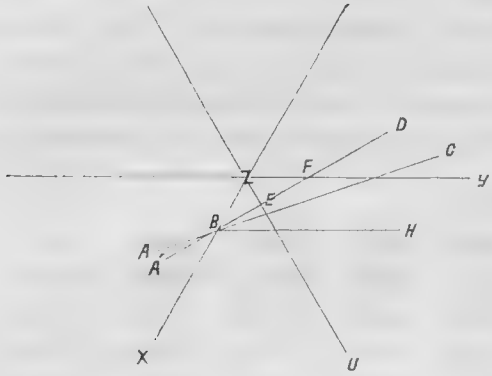


Рис. 116.

Такимъ образомъ—когда плоскость пересѣкаетъ двѣ ближайшія боковыя оси на равномъ разстояніи — она будетъ имѣть индексъ $(1\bar{1}00)$ (т. е. будетъ пинакоидальной—§ 161—плоскостію), а когда она пересѣкаетъ на равномъ разстояніи двѣ боковыхъ оси черезъ одну—то будетъ имѣть индексъ $(11\bar{2}0)$ (призматическая плоскость).

Итакъ для плоскостей 2-го рода (§ 319) мы имѣемъ три типа отличающихся своимъ положеніемъ по отношенію къ координатнымъ осямъ: $(h\bar{i}\bar{k}0)$, $(11\bar{2}0)$, $(1\bar{1}00)$ и т. д.

Очевидно то же самое будетъ наблюдаться *для плоскостей 3-го рода;* стоитъ только въ индексѣ плоскостей 2-го рода для характеристики по Z поставить вмѣсто O — l. Мы имѣемъ здѣсь три типа плоскостей: $(h\bar{i}\bar{k}l)$, $(11\bar{2}l)$, $(1\bar{1}0l)$ и т. д.

323. Итакъ, мы имѣемъ въ гексагональной системѣ слѣдующія 7 простыхъ формъ: $\{0001\}$, $\{h\bar{i}\bar{k}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{1\bar{1}00\}$, $\{h\bar{i}\bar{k}l\}$ $\{11\bar{2}l\}$ и $\{1\bar{1}0l\}$ [1]).

Разныя строенія системы будутъ отличаться по количеству плоскостей, входящихъ въ ихъ простыя формы. Зная символъ симметріи

---

[1]) За *основную* форму, очевидно (§ 161) принимается одна изъ доматическихъ формъ — $\{\bar{1}\bar{1}01\}$.

строенія легко выяснить какія плоскости каждой простой формы связываются элементами симметріи, т. е. сколько плоскостей входитъ въ простую форму (ср. §§ 282, 294, 309). Для гексагональной системы элементами симметріи будутъ: λ^6, λ^3, $6L^2$, π, $6P$ и c.

Зная, что согласно общему принципу (§ 126, 259), выбираются за оси Z—λ^6 или если ея нѣтъ λ^3, за X, Y и U—$3L^2$, а если ихъ нѣтъ $3L^1$ и что плоскость π всегда перпендикулярна Z, мы получимъ слѣдующую таблицу связи плоскостей съ симметріей строенія:

1. λ^6 вызываетъ:

для	$(hk\bar{i}l)$	$(k\bar{i}\bar{h}l)$,	$(\bar{i}hkl)$,	$(\bar{h}\bar{k}\bar{i}l)$,	$(\bar{k}ihl)$,	$(\bar{i}\bar{h}\bar{k}l)$
»	$(hk\bar{i}0)$	$(\bar{k}i\bar{h}0)$,	$(\bar{i}hk0)$,	$(\bar{h}\bar{k}i0)$,	$(\bar{k}ih0)$,	$(\bar{i}\bar{h}\bar{k}0)$
»	$(11\bar{2}l)$	$(\bar{1}2\bar{1}l)$,	$(\bar{2}11l)$,	$(\bar{1}\bar{1}2l)$,	$(1\bar{2}1l)$,	$(2\bar{1}\bar{1}l)$
»	$(11\bar{2}0)$	$(11\bar{2}0)$,	$(\bar{2}110)$,	$(\bar{1}\bar{1}20)$,	$(1\bar{2}10)$,	$(2\bar{1}\bar{1}0)$
»	$(10\bar{1}l)$	$(01\bar{1}l)$,	$(\bar{1}10l)$,	$(\bar{1}01l)$,	$(0\bar{1}1l)$,	$(1\bar{1}0l)$
»	$(10\bar{1}0)$	$(01\bar{1}0)$,	$(\bar{1}100)$,	$(\bar{1}010)$,	$(0\bar{1}10)$,	$(1\bar{1}00)$
»	(0001)	не вызываетъ новыхъ плоскостей.				

2. λ^3 вызываетъ:

»	$(hk\bar{i}l)$	$(\bar{i}hkl)$, $(k\bar{i}hl)$
»	$(hk\bar{i}0)$	$(\bar{i}hk0)$, $(k\bar{i}h0)$
»	$(11\bar{2}l)$	$(\bar{2}11l)$, $(1\bar{2}1l)$
»	$(11\bar{2}0)$	$(\bar{2}110)$, $(1\bar{2}10)$
»	$(10\bar{1}l)$	$(\bar{1}10l)$, $(0\bar{1}1l)$
»	$(10\bar{1}0)$	$(\bar{1}100)$, $(0\bar{1}10)$
»	(0001)	не вызываетъ новыхъ плоскостей.

3. L^2 вызываютъ:

		$L^2=X$.	$L^2=Y$.	$L^2=U$.	L^2 между X и $\bar{U}$.	L^2 между X и $\bar{Y}$.	L^2 между Y и $\bar{U}$.
»	$(hk\bar{i}l)$	$(h\bar{i}\bar{k}l)$	$(\bar{i}k\bar{h}l)$	$(kh\bar{i}l)$	$(\bar{i}\bar{h}\bar{k}l)$	$(\bar{k}\bar{i}hl)$	$(\bar{h}i\bar{k}l)$
»	$(hk\bar{i}0)$	$(h\bar{i}k0)$	$(\bar{i}kh0)$	$(kh\bar{i}0)$	$(\bar{i}\bar{h}\bar{k}0)$	$(\bar{k}\bar{i}h0)$	$(\bar{h}i\bar{k}0)$
»	$(11\bar{2}l)$	$(1\bar{2}1\bar{l})$	$(\bar{2}11\bar{l})$	$(11\bar{2}\bar{l})$	$(2\bar{1}\bar{1}l)$	$(\bar{1}\bar{1}2l)$	$(\bar{1}2\bar{1}l)$
»	$(11\bar{2}0)$	$(1\bar{2}10)$	$(\bar{2}110)$	не выз.	$(2\bar{1}\bar{1}0)$	$(\bar{1}\bar{1}20)$	$(\bar{1}2\bar{1}0)$
»	$(10\bar{1}l)$	$(1\bar{1}0\bar{l})$	$(\bar{1}01\bar{l})$	$(01\bar{1}\bar{l})$	$(10\bar{1}l)$	$(0\bar{1}1\bar{l})$	$(\bar{1}10\bar{l})$
»	$(10\bar{1}0)$	$(1\bar{1}00)$	$(\bar{1}010)$	$(01\bar{1}0)$	не выз.	$(0\bar{1}10)$	$(\bar{1}100)$
»	(0001)	$(000\bar{1})$	(0001)	$(000\bar{1})$	$(000\bar{1})$	$(000\bar{1})$	$(000\bar{1})$

4. P вызываютъ:

	$P=XZ.$	$P=YZ.$	$P=UZ.$	P между X и $\bar{U}$.	P между X и $\bar{Y}$.	P между Y и $\bar{U}$.
$(hk\bar{i}l)$	$(h\bar{i}kl)$	$(\bar{i}khl)$	$(kh\bar{i}l)$	$(i\bar{h}\bar{k}l)$	$(\bar{k}\bar{i}hl)$	$(\bar{h}\bar{i}\bar{k}l)$
$(hk\bar{i}0)$ . . .	$(h\bar{i}k0)$	$(ikh0)$	$(kh\bar{i}0)$	$(i\bar{h}\bar{k}0)$	$(\bar{k}\bar{i}h0)$	$(\bar{h}\bar{i}\bar{k}0)$
$(11\bar{2}l)$ . . .	$(1\bar{2}1l)$	$(\bar{2}11l)$	не выз.	$(2\bar{1}\bar{1}l)$	$(\bar{1}\bar{1}2l)$	$(\bar{1}\bar{2}\bar{1}l)$
$(11\bar{2}0)$ . . .	$(1\bar{2}10)$	$(\bar{2}110)$	не выз.	$(2\bar{1}\bar{1}0)$	$(\bar{1}\bar{1}20)$	$(12\bar{1}0)$
$(10\bar{1}l)$ . . .	$(1\bar{1}0l)$	$(\bar{1}01l)$	$(01\bar{1}l)$	не выз.	$(0\bar{1}\bar{1}l)$	$(\bar{1}10l)$
$(10\bar{1}0)$ . . .	$(1\bar{1}00)$	$(\bar{1}010)$	$(01\bar{1}0)$	не выз.	$(0\bar{1}\bar{1}0)$	$(\bar{1}100)$
(0001) . . .	не выз.	не выз.	не выз.	не выз.	не выз.	не выз

Наконецъ c и π вызываютъ:

	$c.$	$\pi.$
$(hk\bar{i}l)$	$(\bar{h}\bar{k}\bar{i}\bar{l})$	$(hk\bar{i}l)$
$(hk\bar{i}0)$	$(\bar{h}\bar{k}\bar{i}0)$	не выз.
$(11\bar{2}l)$ . . .	$(\bar{1}\bar{1}2l)$	$(11\bar{2}l)$
$(11\bar{2}0)$ . . .	$(\bar{1}\bar{1}20)$	не выз.
$(10\bar{1}0)$ . . .	$(\bar{1}01\bar{l})$	$(10\bar{1}\bar{l})$
$(10\bar{1}0)$ . . .	$(\bar{1}010)$	не выз.
(0001) . . .	$(000\bar{1})$	$(000\bar{1})$.

324. Пользуясь этой таблицей [1]) и зная символы симметріи всѣхъ строеній гексагональной системы, можно найти различіе между этими строеніями; оно рѣзко выражается въ разномъ количествѣ граней, входящихъ въ соотвѣтствующія имъ простыя формы.

Эти различія можно видѣть изъ слѣдующей сводки, въ которой употребляются тѣ же сокращенія и обозначенія, которыя указаны раньше (§§ 295, 312 и др.) [2]).

---

[1]) Выводъ зависимости — благодаря данному элементу симметріи — той или иной плоскости отъ одновременнаго существованія другой — не можетъ представлять затрудненій и требуетъ небольшаго размышленія. Можно облегчить себѣ работу, пользуясь чертежемъ, напр. въ родѣ чертежа 113.

[2]) Названія сведены до минимума. Въ примѣчаніяхъ указаны названія Грота *(Г)*, если они отличаются отъ приводимыхъ, упрощенныхъ Науманновскихъ (resp. Кокшаровскихъ).

	Голоэдрія $\lambda^6\, 6L^2\, c\pi\, 6P$	$\lambda^6\, 6P$	$\lambda^6\, 6L^2$	$\lambda^6\, c\pi$	λ^6	$\lambda^3\, 3L^2\, \pi 3P$
$\{hi\bar{k}l\}$	*Дигексагональная пирамида 24 пл. [1])	Дигексагональная пирамида 12 пл. [4]).	*Трапецоэдръ 12 пл. [8]).	*Пирамида 3-го рода 12 пл. [9]).	Пирамида 3-го рода 6 пл. [11]).	*Дитригон. пирамида 12 пл. [12]).
$\{hi\bar{k}0\}$	Дигексагональная призма 12 пл.	Дигексагональная призма 12 пл.	Дигексагональная призма 12 пл.	Призма 3-го рода 6 пл. [10]).	Призма 3-го рода 6 пл. [10]).	Дитригон. призма 6 пл. [13]).
$\{hh\bar{2}\bar{h}l\}$	*Пирамида 2-го рода 12 пл. [2]).	Пирамида 2-го рода 6 пл. [5]).	*Пирамида 2-го рода 12 пл. [2]).	*Пирамида 2-го рода 12 пл. [2]).	Пирамида 2-го рода 6 пл. [5]).	*Пирамида 2-го рода 12 пл. [2]).
$\{11\bar{2}0\}$	Призма 2-го рода 6 пл.	Призма 2-го рода 6 пл.	Призма 2-го рода 6 пл.	Призма 2-го рода 6 пл.	Призма 2-го рода 6 пл.	Призма 2-го рода 6 пл.
$\{h\bar{h}0l\}$	*Пирамида 1-го рода 12 пл. [2]).	Пирамида 1-го рода 6 пл. [6]).	*Пирамида 1-го рода 12 пл. [2]).	*Пирамида 1-го рода 12 пл. [2]).	Пирамида 1-го рода 6 пл. [6]).	Тригональн. пирамида 1-го р. 6 пл. [14]).
$\{1\bar{1}00\}$	Призма 1-го рода 6 пл.	Призма 1-го рода 6 пл.	Призма 1-го рода 6 пл.	Призма 1-го рода 6 пл.	Призма 1-го рода 6 пл.	Тригональн. призма 1-го р. [15]).
$\{0001\}$	Пинакоидъ 2 пл. [3]).	Пинакоидъ 1 пл. [7]).	Пинакоидъ 2 пл. [3]).	Пинакоидъ 2 пл. [3]).	Пинакоидъ 1 пл. [7]).	Пинакоидъ 2 пл.

325. Среди этихъ простыхъ формъ нѣкоторыя являются замкнутыми многогранниками и встрѣчаются нерѣдко, какъ таковые. Эти замкнутые многогранники суть слѣдующіе: дигексагональная пира-

---

[1]) *Г*—дигексагональная бипирамида.
[2]) *Г*—бипирамида 1-го, resp. 2-го.
[3]) *Г*—базисъ.
[4]) Также $\{h\bar{i}k\bar{l}\}$.
[5]) Также $\{h.h.\overline{2h}.\bar{l}\}$.
[6]) Также $\{h\bar{h}0\bar{l}\}$.
[7]) *Г*—базисъ. Также $\{000\bar{1}\}$.
[8]) Также $\{k\bar{i}\bar{h}l\}$.
[9]) *Г*—бипирамида 3-го р.; также $\{k\bar{i}\bar{h}l\}$).
[10]) Также $\{k\bar{i}\bar{h}0\}$.
[11]) Также $\{h\bar{i}k\bar{l}\}$, $\{k\bar{i}\bar{h}l\}$, $\{k\bar{i}\bar{h}\bar{l}\}$.
[12]) *Г*—дитригональная бипирамида; также $\{k\bar{i}\bar{h}l\}$.
[13]) Также $\{k\bar{i}\bar{h}0\}$.
[14]) *Г*—тригональная бипирамида 1-го р.; также $\{h0\bar{h}l\}$.
[15]) Также $\{10\bar{1}0\}$.

$\lambda^3\, 3L^2\, c3P$	$\lambda^3\, 3P$	$\lambda^3\, \pi$	λ^3	$\lambda^3\, c$	$\lambda^3\, 3L^2$
*Скаленоэдръ 6 пл. [16]).	Скаленоэдръ 6 пл. [18]).	*Тригональная пирамида 3-го р. 6 пл. [20]).	Тригональная пирамида 3-го р. 3 пл. [26]).	*Ромбоэдръ 3-го рода 6 пл. [29]).	*Тригональный трапецоэдръ 6 пл. [11]).
Дигексагональная призма 12 пл.	Дитригональная призма 6 пл. [13]).	Тригональная призма 3-го р. 3 пл. [21]).	Тригональная призма 3-го р. 3 пл. [24]).	Призма 3-го рода [10]).	Дитригональная призма 6 пл. [12]).
*Пирамида 2-го рода 12 пл. [2]).	Пирамида 2-го рода 6 пл. [5]).	*Тригональная пирамида 2-го р. 6 пл. [22]).	Тригональная пирамида 2-го р. 3 пл. [27]).	*Ромбоэдръ 2-го рода [30]).	*Тригональная пирамида 2-го р. 6 пл. [22]).
Призма 2-го рода 6 пл.	Призма 2-го рода 6 пл.	Тригональная призма 2-го р. 3 пл. [23]).	Тригональная призма 2-го р. 3 пл. [23]).	Призма 2-го рода 6 пл.	Тригональная призма 2-го р. 3 пл. [23]).
*Ромбоэдръ [17]) 1-го рода 6 пл.	Ромбоэдръ 1-го рода 3 пл. [19]).	*Тригональная пирамида 1-го р. 6 пл. [34]).	Тригональная пирамида 1-го р. 3 пл. [28]).	*Ромбоэдръ 1-го рода 6 пл. [17]).	*Ромбоэдръ 1-го рода 6 пл. [17]).
Призма 1-го рода 6 пл.	Тригональная призма 1-го р. 3 пл. [15]).	Тригональная призма 1-го р. 3 пл. [25]).	Тригональная призма 1-го р. 3 пл. [25]).	Призма 1-го рода 6 пл.	Призма 1-го рода 6 пл.
Пинакоидъ 2 пл. [3]).	Пинакоидъ 1 пл. [7]).	Пинакоидъ [3]) 2 пл.	Пинакоидъ 1 пл. [7]).	Пинакоидъ 2 пл. [3]).	Пинакоидъ 2 пл. [3]).

мида (голоэдрія), пирамида [1]) ($\lambda^6\, 6L^2\, c6P\pi$, $\lambda^6 c\pi$ и т. д.), скаленоэдръ, ромбоэдръ [1]), гексагональный трапецоэдръ, дитригональная пирамида, тригональный трапецоэдръ, тригональная пирамида [1]).

---

[16]) *Г*—дитригональный скаленоэдръ; также $\{h\bar{k}il\}$.

[17]) Также $\{h0\bar{h}l\}$.

[18]) *Г*—дитригональная пирамида; также $\{h\bar{i}\bar{k}\bar{l}\}$, $\{h\bar{k}il\}$, $\{h\bar{k}i\bar{l}\}$.

[19]) *Г*—тригональная пирамида 1-го р.; также $\{h0\bar{h}\bar{l}\}$, $\{h\bar{h}0\bar{l}\}$, $\{h0\bar{h}l\}$.

[20]) *Г*—тригональная бипирамида 3-го р.; также $\{k\bar{i}\bar{h}l\}$, $\{ih\bar{k}l\}$ и $\{k\bar{h}\bar{i}l\}$.

[21]) Также $\{k\bar{i}\bar{h}0\}$, $\{ih\bar{k}0\}$ и $\{k\bar{h}\bar{i}0\}$.

[22]) *Г*—тригональная бипирамида 2-го рода; также $\{2h.h.\bar{h}.\bar{l}\}$.

[23]) Также $\{2h.\bar{h}.\bar{h}.0\}$.

[24]) *Г*—тригональная бипирамида 1-го рода; также $\{0h\bar{h}l\}$.

[25]) Также $\{01\bar{1}0\}$.

[26]) Также $\{k\bar{i}\bar{h}l\}$, $\{ih\bar{k}l\}$, $\{k\bar{h}\bar{i}l\}$, $\{h\bar{i}\bar{k}\bar{l}\}$, $\{k\bar{i}\bar{h}\bar{l}\}$, $\{ih\bar{k}\bar{l}\}$, $\{k\bar{h}\bar{i}\bar{l}\}$.

[27]) Также $\{2h.\bar{h}.\bar{h}.l\}$, $\{h\bar{h}2h\bar{l}\}$, $\{2h.\bar{h}.\bar{h}.\bar{l}\}$.

[28]) Также $\{h\bar{h}0\bar{l}\}$, $\{0h\bar{h}l\}$, $\{0h\bar{h}\bar{l}\}$.

[29]) Также $\{k\bar{i}\bar{h}l\}$, $\{ih\bar{k}l\}$, $\{k\bar{h}\bar{i}l\}$.

[30]) Также $\{2h.\bar{h}.\bar{h}.l\}$.

[1]) Пирамиды и ромбоэдры разнаго рода не отличимы по наружной формѣ; они отличаются только положеніемъ своихъ плоскостей по отношенію къ координатнымъ осямъ.

Только немногія изъ этихъ простыхъ формъ встрѣчались въ свободномъ развитіи; такъ *гексагональная пирамида*, наблюдается нерѣдко, напр. у *корунда* ($Al_2\ O_3$) — рис. 117 — {2243} изъ Цейлона, причемъ $a : c = 1.3630$ по Миллеру (1852).

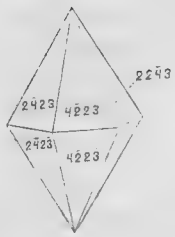


Рис. 117.

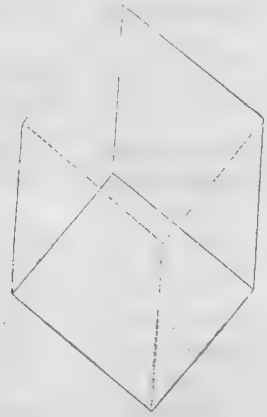


Рис. 118.

Рис. 119.

Еще чаще наблюдается *ромбоэдръ*; напр. рис. 118—119 различные ромбоэдры *кальцита*, причемъ рис. 118—{$20\bar{2}1$}, а рис. 119—

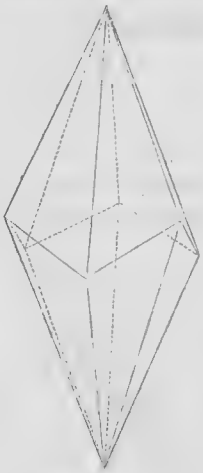


Рис. 120.

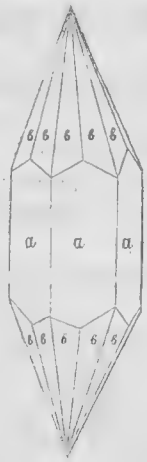


Рис. 121.

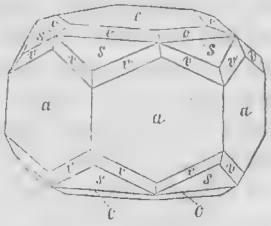


Рис. 122.

{$10\bar{1}2$}, гдѣ $a : c$ 0.8546 (Кокшаровъ 1875), нерѣдко наблюдаемые въ кальцитахъ изъ разныхъ мѣстностей (по Кокшарову). Точно также

встрѣченъ въ чистомъ видѣ и *скаленоэдръ*, напр. рис. 120 обычный скаленоэдръ кальцита—{2131}.

Другія формы не наблюдались въ чистомъ видѣ, а нѣкоторыя, напр. гексагональный трапецоэдръ и дитригональная пирамида, не встрѣчались даже въ комбинаціяхъ. Тригональныя пирамиды и трапецоэдры извѣстны въ немногихъ веществахъ въ видѣ небольшихъ площадокъ, напр. разныя формы въ комбинаціяхъ кварца рис. 52.

Очень нечасты и комбинаціи съ *дигексагональной пирамидой*. Иногда она встрѣчается въ видѣ сильно развитой формы, напр. въ кристаллахъ *берилла* изъ различныхъ мѣстностей, напр. рис. 121—бериллъ изъ Мурзинки по Кокшарову (1854), гдѣ $a = \{10\bar{1}0\}$, а b дигексагональная пирамида неопредѣлимаго индекса. Иногда даже дигексагональныя пирамиды господствуютъ въ такихъ кристаллахъ бериллов [1]).

326. Подобно тому, какъ мы это видѣли въ другихъ системахъ (§§ 297, 314 и др.) и здѣсь мы наблюдаемъ въ строеніяхъ, не обладающихъ элементами сложной симметріи, въ видѣ комбинацій *энантіоморфныя* формы, (напр. правые и лѣвые многогранники кварца—рис. 44 и 52).

Эти энантіоморфные многогранники теоретически могутъ являться даже въ видѣ простыхъ формъ — напр. тригональные трапецоэдры (рис. 43 въ строеніи $\lambda^3\, 3L^2$) или гексагональные трапецоэдры $\{hik\bar{l}\}$ въ строеніи $\lambda^6\, 6L^6$. Въ природѣ, однако, наблюдаются только энантіоморфныя комбинаціи этихъ поліэдровъ.

Существованіе энантіоморфныхъ — правыхъ и лѣвыхъ — многогранниковъ въ такихъ строеніяхъ значительно увеличиваетъ количество простыхъ формъ одного рода (§ 263), которыя мы можемъ различить на основаніи изученія ихъ физическихъ свойствъ (§ 337). Должны и могутъ быть отдѣляемы многогранники, плоскости которыхъ перпендикулярны къ посолоннымъ векторамъ отъ тѣхъ—съ ними идентичныхъ по наружной формѣ поліэдровъ,—грани которыхъ перпендикулярны къ векторамъ противусолоннымъ. Это неизбѣжно слѣ-

---

[1]) Какъ показалъ Пенфильдъ (1890) эти довольно обычныя формы бериллов являются результатомъ вытравленія. Дигексагональная пирамида никогда не была встрѣчена сильно развитой въ поліэдрахъ кристаллизаціи. Точно также и для кварца, тригональный трапецоэдръ иногда является господствующимъ и сильно развитымъ въ явленіяхъ вытравленія, но не кристаллизаціи.

дуетъ изъ свойствъ векторовъ и дѣйствительно рѣзко выражается въ нѣкоторыхъ физическихъ свойствахъ такихъ многогранниковъ [1]).

Такъ напр. для строенія $\lambda^3 3L^2$ — форма $\{hi\bar{k}l\}$ является въ видѣ тригональныхъ трапецоэдровъ—замкнутыхъ шестигранниковъ (рис. 43); при этомъ можно различить четыре разныхъ трапецоэдра — $\{hi\bar{k}l\}$, $\{hi\bar{k}\bar{l}\}$, $\{k\bar{i}\bar{h}l\}$ и $\{k\bar{i}\bar{h}\bar{l}\}$, обладающихъ одинаковыми по величинѣ характеристиками.

Но *грани* этихъ трапецоэдровъ различны по своимъ свойствамъ для посолонныхъ и противусолонныхъ разностей вещества, и въ концѣ концовъ, надо различать не четыре, а *восемь* разныхъ трапецоэдровъ, по два для индекса каждыхъ характеристикъ.

Соотвѣтственно для $\lambda^3 3L^2$ мы имѣемъ *два* $\{0001\}$ — посолонный и противусолонный и т. д. [2]).

327. Вещества гексагональной системы были извѣстны очень давно и на двухъ изъ нихъ—кварцѣ (строеніе $\lambda^3 3L^2$) и гематитѣ ($\lambda^3 3L^2 c3P$) Стенонъ (§ 9, 148) открылъ въ 1669 г. основной законъ кристаллографіи.

Къ этой системѣ относится много самыхъ обычныхъ, распространенныхъ веществъ, но въ общемъ количество тѣлъ, сюда отно-

---

[1]) Такое отличіе фигуръ одинаковаго внѣшняго контура иногда опускается изъ виду, когда кристаллическій многогранникъ изучается чисто геометрически. Вслѣдствіе этого приходятъ нерѣдко къ невѣрнымъ выводамъ и нѣкоторые изслѣдователи, напр. Беккенкампъ (1897—1902) или Заксъ (1902), не видя такого различія въ свойствахъ 32 кристаллическихъ структуръ, подвергаютъ сомнѣнію достаточность положенныхъ въ основу ихъ принциповъ симметріи. Однако, такія ихъ сомнѣнія происходятъ только отъ того, что, примѣняя къ изученію кристалла принципы геометріи, они забываютъ, что кристаллическій многогранникъ не есть абстрактное тѣло геометріи; изученіе же его, какъ фигуры равновѣсія—капли—твердаго тѣла сразу указываетъ на существованіе въ немъ своеобразныхъ поверхностныхъ явленій, отсутствующихъ въ поліэдрахъ геометріи и объясняетъ наблюдаемыя особенности въ физическихъ его свойствахъ.

[2]) Для *гемиморфныхъ* формъ (см. табл. § 228) мы не имѣемъ такого различія двухъ разностей для каждаго вектора — ибо здѣсь по одному направленію мы можемъ различать maximum два вектора, а не четыре, какъ въ энантіоморфныхъ формахъ (ср. § 206).

Если, напр. $\{0001\}$ обладаетъ по отношенію къ электрическимъ явленіямъ свойствами аналогичнаго полюса (§ 218), то $\{000\bar{1}\}$ — будетъ для нихъ антилогичнымъ полюсомъ. Но мы не можемъ — на основаніи симметріи — ждать другой разности вещества съ $\{0001\}$ — какъ антилогичнымъ полюсомъ и т. д.

сящихся, не велико, а для нѣкоторыхъ строеній (λ^3, $\lambda^6 6L^2$) извѣстны всего одинъ, два представителя. Вещества строенія $\lambda^3 3L^2 \pi 3P'$ и $\lambda^3 \pi$ до сихъ поръ не наблюдались въ природѣ.

Издавна извѣстны и отличены уже въ XVIII столѣтіи — вещества *голоэдріи*—$\lambda^6 6L^2 c\pi 6P$, *ромбоэдрической геміэдріи*—$\lambda^3 c3L^2 3P$ и строенія $\lambda^3 3P$, отчасти $\lambda^3 3L^2$. Какъ примѣръ тѣлъ перваго строенія можно привести напр. комбинацію рис. 122—*берилла* изъ Бразиліи по Деклуазо (1862), гдѣ $a=\{10\bar{1}0\}$, $s=\{11\bar{2}1\}$, $o=\{11\bar{2}2\}$ и $v=\{21\bar{3}1\}$, причемъ $a:c=1:0.4988$ (Кокшаровъ 1854), а для строенія $\lambda^3 3L^2 c3P$—рис. 123 *кальцитъ* изъ Дербишайра по Леви (1837), гдѣ $c=\{10\bar{1}0\}$, $r=\{21\bar{3}1\}$, $f=\{\bar{2}021\}$, $p=\{10\bar{1}1\}$ и

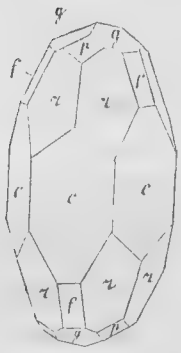


Рис. 123.

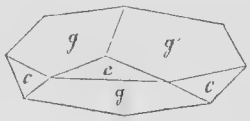


Рис. 124.

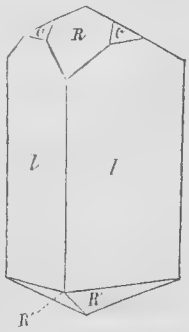


Рис. 125.

$g=\{10\bar{1}2\}$, причемъ $a:c=0.8546$ по Кокшарову (1875), или рис. 124 — кальцитъ, характерный для самыхъ разнообразныхъ мѣстностей по Н. И. Кокшарову (обозначенія тѣ же), для строенія $\lambda^3 3P$—рис. 122 *турмалинъ* (ср. рис. 59) изъ Арендаля по Г. Розе (1838), гдѣ $R=\{10\bar{1}1\}$, $l=\{01\bar{1}0\}$, $o=\{02\bar{2}1\}$ и $R'=\{01\bar{1}\bar{1}\}$ при $a:c=1:0.4480$ (Ерофѣевъ 1870).

328. Выясненіе другихъ строеній распространялось очень медленно. Въ 1820-мъ году Д. Гершель наблюдалъ впервые для кварца (рис. 52)—*(строеніе* $\lambda^3 3L^2$*)* — вращеніе плоскости поляризаціи свѣта, въ связи съ наружной формой кристалла. Это открытіе привело къ выясненію тетартоэдрій (§ 202) и впервые придало иное значеніе давно извѣстнымъ энантіоморфнымъ поліэдрамъ кварца. Какъ примѣръ тѣлъ этого строенія можно привести рис. 126—кристалла *киновари*

изъ Авалы въ Сербіи по Шмидту (1887), гдѣ $a = \{10\bar{1}1\}$, $o = \{0001\}$, $n = \{02\bar{2}1\}$, $g = \{0112\}$, $f = \{8355\}$, $M = \{1010\}$, причемъ $a : c = 1 : 1.1453$ (Шабусъ 1850).

Черезъ немного лѣтъ, въ 1823 году Гайдингеръ на кристаллахъ *апатита* впервые наблюдалъ *строеніе* $\lambda^6 c\pi$, позже найденное и для нѣсколькихъ другихъ веществъ. Какъ примѣръ комбинаціи этого

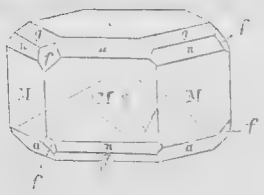


Рис. 126.

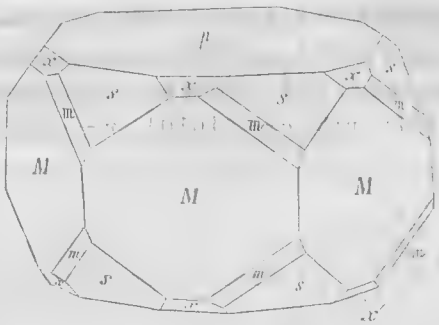


Рис. 127.

строенія можетъ служить рис. 127 — апатита изъ Кипребинска на Уралѣ по Н. И. Кокшарову (1854), гдѣ $M = \{10\bar{1}0\}$, $x = \{10\bar{1}1\}$, $p = \{0001\}$, $s = \{11\bar{2}1\}$, и $m = \{21\bar{3}1\}$, причемъ $a : c = 0.7346$.

Къ концу 1820-хъ годовъ Розе (1827) наблюдалъ въ *ильменитѣ строеніе* $\lambda^3 c$, но, исходя изъ ложныхъ идей изоморфизма, пытался толковать наблюдаемыя отклоненія отъ строенія $\lambda^3 c3L^2 3P$, какъ неправильности роста. Правильно было объяснено это строеніе лишь въ 1830 году Науманномъ и Гесселемъ. Какъ примѣръ такихъ комбинацій можетъ быть взятъ кристаллъ ильменита изъ Ильменскихъ горъ по Н. И. Кокшарову (1854), рис. 128 — гдѣ $o = \{0001\}$, $R = \{10\bar{1}1\}$, $t = \{\bar{1}012\}$, $d = \{\bar{2}021\}$, $n = \{2243\}$, причемъ $a . c = 1.3846$.

329. Эти шесть строеній были открыты раньше вывода всѣхъ 12 классовъ гексагональной системы, сдѣланнаго Гесселемъ (1830). Всѣ остальныя стали извѣстны позже этого обобщенія. Они открывались медленно.

Въ 1840-мъ году Брейтгаунтъ на кристаллахъ *гринокита* описываетъ *строеніе* $\lambda^6 6P$. Довольно долго это наблюденіе оспаривалось и гринокиту пробовали придавать другую структуру, но въ

концѣ концовъ оно было подтверждено дальнѣйшими наблюденіями. Позже въ 1880-хъ годахъ Цефаровичемъ найденъ другой примѣръ того же строенія въ *іодистомъ серебрѣ* и затѣмъ наблюдалось въ немъ же еще 2—3 вещества. Рис. 129 представляетъ кристаллъ гринокита изъ Бишоптауна въ Шотландіи по Грегу и Леттсому (1858), гдѣ $c=\{0001\}$, $x=\{10\bar{1}1\}$, $m=\{10\bar{1}0\}$, $z=\{20\bar{2}1\}$, $c'=\{000\bar{1}\}$, причемъ $a:c=1:0.8109$ (Мюгге 1882).

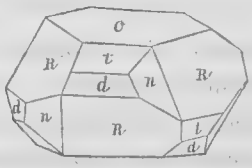


Рис. 128.

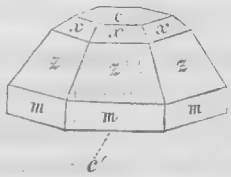


Рис. 129.

Въ 1869 году Гротъ на *іоднокисломъ натріи*—$NaJO_4\,3H_2O$—открываетъ единственный пока случай наиболѣе простого *строенія*—λ^3—гексагональной системы. Рис. 130 представляетъ комбинацію этого вещества, гдѣ $r=\{10\bar{1}1\}$, $s=\{11\bar{2}3\}$, $e=\{11\bar{2}1\}$, $c=\{000\bar{1}\}$, причемъ $a:c=1.094$.

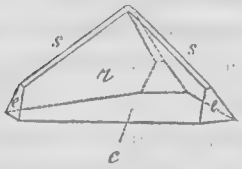


Рис. 130.

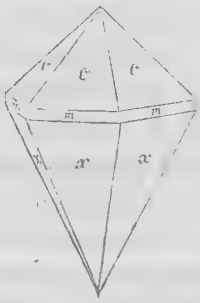


Рис. 131.

Въ 1882 году путемъ изученія явленій вытравленія въ *нефелинѣ* Баумгауэръ открываетъ третье неизвѣстное строеніе гексагональной системы — *строеніе* λ^6. Нефелинъ однако даетъ только сложные двойники, вполнѣ, въ концѣ концовъ, мимезирующіе комбинаціи голоэдріи. Кристаллъ нефелина къ тому же представляетъ чрезвычайно сложную структуру, вызывающую сильное сомнѣніе даже въ принадлежности нефелина къ одноосным тѣламъ. Въ 1889 году Вернадскій

на кристаллахъ *триэтиловаго эфира тримезиновой кислоты* наблюдалъ второй случай этого строенія, причемъ кристаллы иногда даютъ сростки, вполнѣ отвѣчающія строенію $\lambda^6 6L^2$. Позже Траубэ нашелъ еще нѣсколько веществъ этого класса, но всегда всѣ они даютъ простыя комбинаціи, такъ что въ наружной ихъ формѣ незамѣтно отсутствія элементовъ сложной симметріи. Рисунокъ 131 представляетъ комбинацію безводнаго *виннокислаго антимонилъ - свинца* по Траубэ (1893), гдѣ $o = \{10\bar{1}1\}$, $m = \{10\bar{1}0\}$, $x = \{20\bar{2}1\}$, причемъ $a : c = 0.8526$.

Наконецъ есть указанія на нахожденіе тѣлъ, кристаллизующихся еще въ одномъ строеніи гексагональной системы — въ *строеніи* $\lambda^6\ 6L^2$. Въ 1889 году Вернадскій указалъ на возможность принадлежности къ нему кристалловъ *триэтиловаго эфира тримезиновой кислоты*, но ясно гемиморфный характеръ въ нихъ оси Z заставляетъ относить такіе многогранники къ своеобразнымъ сросткамъ болѣе простаго строенія λ^6, какъ было уже упомянуто выше. Въ 1894 г. Траубэ описалъ второй случай, который могъ быть отнесенъ къ разбираемому классу, именно группу изоморфныхъ *двойныхъ солей виннокислаго барія (или свинца) съ* KNO_3; но изслѣдованіе свинцовой соли, сдѣланное В. В. Карандѣевымъ (1903), доказало принадлежность ея къ строенію λ^6, къ которому по аналогіи должна быть отнесена и изоморфная ей баріевая соль. Наконецъ въ 1897 году Траубэ вновь наблюдалъ тоже строеніе на другомъ веществѣ—на *виннокисломъ антимонилъ-синхонинѣ*— $(C_{19}H_{22}N_2O)_2 (SbO)_2 (C_4H_4O_6)_2 . 8\,aq$ — которое и остается до сихъ поръ единственнымъ представителемъ этого класса; его поліэдры по наружному виду не отличимы отъ голоэдріи.

330. **Правильная система.** Къ этой послѣдней системѣ относится пять строеній: 1) голоэдрія $3\lambda^4 4L^3 6L^2 c 3\pi 6P$, 2) $3\lambda^4 4L^3 6L^2$, 3) $3\lambda^2 4L^3 c 3\pi$, 4) $3\lambda^2 4L^3 6P'$ и 5) $3\lambda^2 4L^3$.

Въ этихъ веществахъ мы наблюдаемъ только *изотропные пояса* (§ 252); слѣдовательно здѣсь образуются многогранники, форма которыхъ не мѣняется въ зависимости отъ условій среды, въ которой находится вещество; другими словами многогранникъ не деформируется, какъ бы тѣло ни сжималось и ни расширялось, напр. во время его нагрѣванія или охлажденія.

Изъ изотропности поясовъ вытекаетъ и другая чрезвычайно важ-

ная особенность этихъ многогранниковъ: они не мѣняются отъ измѣненія химическаго состава тѣла и одинаковы для тѣлъ всякаго химическаго состава.

Отсюда ясно, что кристаллическая ячейка для всѣхъ веществъ правильной системы — кубическая [1]) и въ сѣтчатомъ строеніи нѣтъ ни одной перемѣнной, которая бы мѣнялась въ зависимости отъ химическаго состава.

За координатныя оси (ребра ячейки) принимаются $3\lambda^4$, а когда ихъ нѣтъ $3\lambda^2$. Очевидно, безразлично какую изъ нихъ выбрать за оси X, Y и Z. *Всѣ эти оси всегда тождественны.*

331. Такой характеръ координатныхъ осей, конечно, сказывается и въ идентичности кристаллическихъ осей: онѣ всѣ равны. Онъ проявляется также и въ свойствахъ плоскостей, изучаемыхъ по ихъ положенію къ координатнымъ осямъ.

Именно, всякое различіе между призматическими и обоего рода доматическими плоскостями исчезаетъ. Можно различить только три типа плоскостей (подобно гранямъ ромбической системы — § 290): 1) пинакоидальныя—пересѣкаютъ одну координатную ось, 2) призматическія и доматическія — пересѣкаютъ двѣ координатныхъ оси и 3) пирамидальныя—пересѣкаютъ всѣ три координатныя оси.

Но возможно здѣсь еще дальнѣйшее дѣленіе этихъ трехъ типовъ плоскостей; оно основывается на равенствѣ или неравенствѣ отрѣзковъ (параметровъ), дѣлаемыхъ ими на координатныхъ осяхъ. Благодаря тождественности кристаллическихъ осей, это равенство или неравенство параметровъ сохраняется при всякаго рода измѣненіяхъ среды, окружающей кристаллъ.

Въ концѣ концовъ мы имѣемъ здѣсь слѣдующіе 7 разныхъ родовъ плоскостей:

1) Пинакоидальныя . . . . . (001), (010) и т. д.

---

[1]) Нѣкоторые изслѣдователи — напр. Малляръ, Федоровъ и др. — принимая во вниманіе молекулярныя представленія о кристаллѣ (§ 134 сл.) указываютъ на возможность существованія нѣсколькихъ типовъ ячейки для веществъ правильной системы. Согласно общему взгляду, проводимому въ этомъ сочиненіи (ср. § 145) этотъ выводъ, основанный на молекулярныхъ теоріяхъ, оставленъ въ сторонѣ. Федоровъ (1902) полагаетъ, что изученныя вещества правильной системы укладываются въ два разныхъ типа ячейки; къ другому выводу приходилъ Малляръ (1885); онъ допускалъ одинъ типъ.

2) Призматическія (resp. доматическія) съ равными параметрами ..... (110), (011), (101) и т. д.

3) Тѣ же съ неравными параметрами. $(hk0)$, $(0hk)$ и т. д.

4) Пирамидальныя съ равными параметрами ..... (111), $(1\bar{1}1)$ и т. д.

5) Пирамидальныя съ однимъ параметромъ, *бо́льшимъ* чѣмъ два другихъ равныхъ (hhl), (hlh) и т. д. (гдѣ $l < h$).

6) Пирамидальныя съ однимъ параметромъ *меньшимъ*, чѣмъ два другихъ равныхъ, напр. (llh), (lhl) и т. д. (гдѣ $l < h$).

7) Пирамидальныя съ тремя неравными параметрами, т. е. (hkl) и т. д.

Такимъ образомъ, въ этой системѣ мы видимъ постепенное увеличеніе различнаго рода пирамидальныхъ и уменьшеніе различія пинакоидальныхъ плоскостей.

332. Всѣ эти плоскости соединяются на основаніи симметріи въ разныя простыя формы, причемъ плоскости разнаго рода не могутъ, конечно, принадлежать къ одной и той же простой формѣ.

Элементы симметріи системы связываютъ плоскости слѣдующимъ образомъ:

1) $3\lambda^4$ связываютъ:

		$\lambda^4 = X$.			$\lambda^4 = Y$.			$\lambda^4 = Z$.		
(hkl)	съ	$(h\bar{l}\bar{k})$,	$(h\bar{k}\bar{l})$,	$(hl\bar{k})$	$(\bar{l}kh)$,	$(\bar{h}k\bar{l})$,	$(lk\bar{h})$	$(k\bar{h}\bar{l})$,	$(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$,	$(\bar{k}hl)$
(hhl)	»	$(h\bar{l}h)$,	(hhl),	$(hl\bar{h})$	$(\bar{l}hh)$,	$(hh\bar{l})$,	$(lh\bar{h})$	$(h\bar{h}\bar{l})$,	$(\bar{h}\bar{h}\bar{l})$,	$(\bar{h}hl)$
(llh)	»	$(\bar{l}hl)$,	$(l\bar{l}\bar{h})$,	(lhl)	$(\bar{h}ll)$,	$(ll\bar{h})$,	$(hl\bar{l})$	$(\bar{l}\bar{l}h)$,	$(\bar{l}\bar{l}h)$,	$(\bar{l}lh)$
(111)	»	$(1\bar{1}\bar{1})$,	$(1\bar{1}\bar{1})$,	$(11\bar{1})$	$(\bar{1}11)$,	$(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$,	$(11\bar{1})$	$(1\bar{1}\bar{1})$,	$(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$,	$(\bar{1}11$
(110)	»	(110),	(101),	$(10\bar{1})$	(110),	(011),	(011)	$(1\bar{1}0)$,	$(1\bar{1}\bar{0})$,	(110)
$(hk0)$	»	$(h\bar{k}0)$,	$(h0k)$,	$(h0\bar{k})$	$(\bar{h}k0)$,	$(0kh)$,	$(0kh)$	$(kh0)$,	$(hk0)$,	$(kh0)$
(100)		не связываетъ.				$(\bar{1}00)$			$(\bar{1}00)$	

2) $3\ \lambda^2$ связываютъ:

	$\lambda^2 = X$	$\lambda^2 = Y$	$\lambda^2 = Z$
(hkl)	$(\bar{h}\bar{k}l)$	$(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$	$(h\bar{k}l)$
(hhl)	$(\bar{h}\bar{h}\bar{l})$	$(\bar{h}h\bar{l})$	$(hh\bar{l})$
(llh)	$(l\bar{l}\bar{h})$	$(\bar{l}l\bar{h})$	$(\bar{l}\bar{l}h)$
(111)	$(1\bar{1}\bar{1})$	$(\bar{1}11)$	$(\bar{1}\bar{1}1)$
(110)	$(1\bar{1}0)$	$(\bar{1}10)$	$(\bar{1}\bar{1}0)$

$(hk0)$	$(h\bar{k}0)$	$(\bar{h}k0)$	$(\bar{h}\bar{k}0)$
(100)	не связ.	(100)	$(\bar{1}00)$

3) 6 L^2 связываютъ:

	L^2 между X и Y	L^2 между X и $\bar{Y}$	L^2 между X и Z	L^2 между $\bar{X}$ и Z	L^2 между Y и Z	L^2 между $\bar{Y}$ и Z
(hkl)	(khl)	$(\bar{k}\bar{h}l)$	$(\bar{l}kh)$	$(l\bar{k}\bar{h})$	(hlk)	$(\bar{h}\bar{l}\bar{k})$
(hhl)	$(hh\bar{l})$	$(\bar{h}\bar{h}l)$	$(\bar{l}hh)$	(lhh)	(hlh)	$(\bar{h}\bar{l}\bar{h})$
(llh)	$(ll\bar{h})$	$(\bar{l}\bar{l}h)$	$(h\bar{l}l)$	$(h\bar{l}\bar{l})$	$(\bar{h}l)$	$(\bar{h}\bar{l})$
(111)	$(11\bar{1})$	$(\bar{1}\bar{1}1)$	$(\bar{1}11)$	$(1\bar{1}\bar{1})$	$(\bar{1}11)$	$(1\bar{1}\bar{1})$
(110)	не св.	$(\bar{1}\bar{1}0)$	$(0\bar{1}1)$	$(0\bar{1}\bar{1})$	$(\bar{1}01)$	$(\bar{1}0\bar{1})$
$(hk0)$	$(hk0)$	$(\bar{k}\bar{h}0)$	$(0\bar{k}h)$	$(0\bar{k}\bar{h})$	$(\bar{h}0k)$	$(\bar{h}0\bar{k})$
(100)	(010)	$(0\bar{1}0)$	(001)	$(00\bar{1})$	$(\bar{1}00)$	$(\bar{1}00)$

4) π связываютъ:

	$\pi=XZ$	$\pi=YZ$	$\pi=XY$
(hkl)	$(h\bar{k}l)$	$(\bar{h}kl)$	$(hk\bar{l})$
(hhl)	$(h\bar{h}l)$	$(h\bar{h}l)$	$(hh\bar{l})$
(llh)	(llh)	(llh)	(llh)
(111)	$(1\bar{1}1)$	$(\bar{1}11)$	$(11\bar{1})$
(110)	$(1\bar{1}0)$	$(\bar{1}10)$	не связ.
$(hk0)$	$(h\bar{k}0)$	$(\bar{h}k0)$	не связ.
(100)	не связ.	$(\bar{1}00)$	не связ.

5) 6 P связываютъ:

	P между X и Y	P между X и $\bar{Y}$	P между X и Z	P между $\bar{X}$ и Z	P между Y и Z	P между $\bar{Y}$ и Z
(hkl)	(khl)	$(\bar{k}\bar{h}l)$	(lkh)	$(\bar{l}k\bar{h})$	(hlk)	$(h\bar{l}\bar{k})$
(hhl)	не связ.	(hhl)	(lhh)	(lhh)	(hlh)	$(h\bar{l}\bar{h})$
(llh)	не связ.	$(\bar{l}\bar{l}h)$	(hll)	$(\bar{h}l\bar{l})$	(lhl)	$(\bar{h}\bar{l}\bar{l})$
(111)	не связ.	$(\bar{1}\bar{1}1)$	не связ.	$(1\bar{1}1)$	не связ.	$(1\bar{1}\bar{1})$
(110)	не связ.	$(\bar{1}\bar{1}0)$	(011)	$(01\bar{1})$	(101)	$(10\bar{1})$
$(hk0)$	$(kh0)$	$(\bar{k}\bar{h}0)$	$(0kh)$	$(0\bar{h}\bar{k})$	$(h0k)$	$(0\bar{h}\bar{k})$
(100)	(010)	$(1\bar{1}0)$	(001)	$(00\bar{1})$	не связ.	не связ.

6) Наконецъ c связываетъ каждую грань съ параллельной ей гранью напр. (hkl) съ $(hk\bar{l})$, (hhl) съ $(\bar{h}\bar{h}\bar{l})$ и т. д.

333. Благодаря такой зависимости плоскостей кристалла отъ элементовъ симметріи, каждое кристаллическое строеніе будетъ характеризоваться слѣдующими простыми формами:

Голоэдрія $3L^{4}4L^{3}6L^{2}c3\pi6P$	$3\lambda^{4}4L^{3}6L^{2}$	$3\lambda^{2}4L^{3}6P$	$3\lambda^{2}4L^{3}c3\pi$	$3\lambda^{2}4L^{3}$
{hkl} — Сорокавосьмигранникъ [1]) 48 пл.	{hkl} — Гироэдръ [5]) 24 пл.	{hkl} Преломлен. пирамидальный тетраэдръ [10]) 24 пл.	{hkl} Преломлен. пентагон. додекаэдръ [9]) 24 пл.	{hkl} Тетартоэдръ [8]) 12 пл.
	{$h\bar{k}l$} — Гироэдръ 24 пл.	{$\bar{h}kl$} Преломлен. пирамидальный тетраэдръ 24 пл.	{khl}	{khl}
				{$h\bar{k}l$}
				{$k\bar{h}l$}
{hhl} — Трапецоэдръ [2]) 24 пл.	— Трапецоэдръ [2]) 24 пл.	{hhl} {$\bar{h}hl$} Пирамидальн. тетраэдръ [6]) 12 пл.	Трапецоэдръ 24 пл.	{hh_l} {$\bar{h}h_l$} Пирамидальный тетраэдръ [6]) 12 пл.
{llh} — Пирамидальный октаэдръ [3]) 24 пл.	— Пирамидальный октаэдръ [3]) 24 пл.	{llh} {$l\bar{l}h$} Дельтоэдръ 12 пл.	Пирамидальный октаэдръ 24 пл.	{llh} {$l\bar{l}h$} Дельтоэдръ [7]) 12 пл.
{111} — Октаэдръ 8 пл.	— Октаэдръ 8 пл.	{111} {$1\bar{1}1$} Тетраэдръ 4 пл.	Октаэдръ 8 пл.	{11l} {11l} Тетраэдръ 4 пл.
{110} — Ромбическій додекаэдръ 12 пл.	— Ромбическій додекаэдръ 12 пл.	— Ромбическій додекаэдръ 12 пл.	— Ромбическій додекаэдръ 12 пл.	Ромбическій додекаэдръ 12 пл.
{hk0} — Пирамидальный кубъ [4]) 28 пл.	— Пирамид. кубъ [4]) 24 пл.	— Пирамидальный кубъ. 24 пл.	{hk0} {kh0} Пентагональный додекаэдръ 12 пл.	{hk0} {kh0} Пентагональный додекаэдръ 6 п.
{001} — Кубъ. 6 пл.	Кубъ. 6 пл.	Кубъ 6 пл.	Кубъ. 6 пл.	

1) Г.—Гексакисоктаэдръ.
2) Г.—Икоситетраэдръ.
3) Г.—Тріакисоктаэдръ.
4) Г.—Тетракисгексаэдръ.
5) Г.—Пентагонникоситетраэдръ.
6) Г.—Тріакистетраэдръ.
7) Г.—Дельтоидодекаэдръ.
8) Г.—Тетраэдрическій пентагондодекаэдръ.
9) Г.—Діакисдодекаэдръ.
10) Г.—Гексакистетраэдръ.

334. Особенность этой системы составляетъ, какъ легко видѣть, то, что *всѣ ея простыя формы суть замкнутые многогранники*. Это отражается и на ея комбинаціяхъ.

Изъ этихъ простыхъ замкнутыхъ многогранниковъ, каждый получилъ разныя наименованія. Пять изъ нихъ, какъ легко видѣть, неизмѣнны и единичны (именно $\{100\}$, $(111\}$, $\{1\bar{1}1\}$ и $\{110\}$)—а остальные—въ зависимости отъ величины характеристикъ, мѣняютъ свою форму.

Большинство этихъ простыхъ поліэдровъ наблюдается одновременно для нѣсколькихъ строеній, такъ что по ихъ наружной формѣ не можетъ быть опредѣлено строеніе, ибо напр. $\{100\}$—*кубъ* (рис. 1) и $\{110\}$—*ромбическій додекаэдръ* (рис. 4) встрѣчаются во всѣхъ строеніяхъ. Такъ напр. въ кубахъ кристаллизируется $NaCl$ (голоэдрія), NH^4Cl $(3\lambda^4 4L^3 6L^2)$, борацитъ $(3\lambda^2 4L^3 6P')$, $NaClO^3$ $(4L^3 3L^2)$ или квасцы $(3\lambda^2 4L^3 c3\pi?)$. Точно тоже наблюдается и для $\{110\}$: его мы встрѣчаемъ въ кристаллахъ граната (голоэдрія), содалита $(3L^2 4L^3 6P')$ и т. д.

Въ чистыхъ *октаэдрахъ* (рис. 6) встрѣчается много самыхъ различныхъ веществъ, напр. шпинели (голоэдрія), квасцы $(3\lambda^2 c3\pi 4L^3?)$, $Cu^2 0$ $(3\lambda^4 4L^3 6L^2)$ и т. д.; въ *тетраэдрахъ* (рис. 24) — блеклыя руды, борацитъ $(3\lambda^2 4L^3 6P')$, $NaBr0^3$ $(3\lambda^2 4L^3)$ и т. д.

Значительно менѣе распространены въ свободномъ состояніи другія простыя формы; изъ нихъ наиболѣе обычны *трапецоэдры*, напр. $\{211\}$ [1]), встрѣчающійся нерѣдко въ гранатахъ, лейцитахъ, анальцимахъ и т. д. (рис. 132) или *пирамидальные тетраэдры*, наблюдаемые, значительно рѣже, въ сфалеритѣ, алмазѣ, гельвинѣ и т. д., напр. рис. 133 — $\{211\}$, характерный для ахтарагдита или для гельвина изъ Люпикко въ Финляндіи (Еремѣевъ 1866) и т. д.

Пирамидальные кубы также иногда наблюдаются въ свободномъ состояніи, напр. $\{120\}$ (рис. 134) въ кристаллахъ мѣди, золота и т. д. [2]). Точно также извѣстны въ свободномъ состояніи и *пентагональные додекаэдры*, напр. $\{102\}$—рис. 135—въ пиритѣ и изоморфныхъ съ нимъ соединеніяхъ [3]).

---

[1]) Рѣже встрѣчается еще $\{311\}$.

[2]) Еще встрѣчается $\{310\}$ (въ плавиковомъ шпатѣ).

[3]) Это такъ-наз. *положительный* пентагональный додекаэдръ; въ отличіе отъ него $\{201\}$—будетъ отрицательнымъ.

Почти не встрѣчаются въ чистомъ видѣ формы индекса $\{hkl\}$. Есть указаніе на нахожденіе *преломленныхъ пирамидальныхъ тетра-*

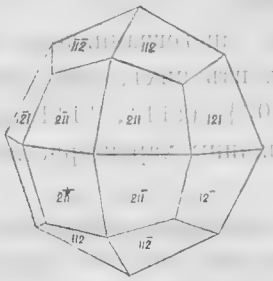


Рис. 132.

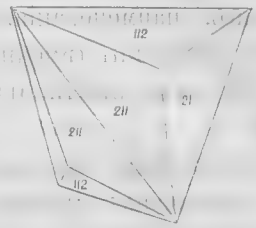


Рис. 133.

эдровъ—для *алмаза*—но они описаны только въ видѣ поліэдровъ съ изогнутыми плоскостями, неопредѣленнаго индекса, напр. рис. 136.

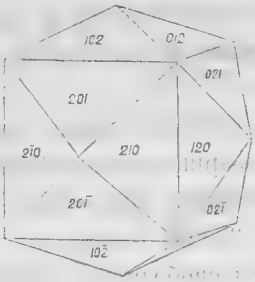


Рис. 134.

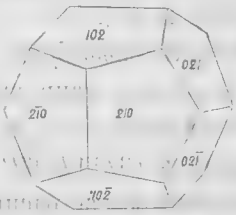


Рис. 135.

Эта геометрическая фигура, однако, близка къ многогранникамъ, напр. къ $\{513\}$—рис. 137. Точно также только для одного вещества—для *нашатыря*—наблюдались *гироэдры* ($3\lambda^2 4L^3$), образующіеся при совершенно особыхъ, своеобразныхъ условіяхъ, въ очень деформированныхъ поліэдрахъ, напр. идеально возстановленный — $\{943\}$— рис. 138 по Славику (1902) [1].

335. Всѣ остальныя простыя формы наблюдались только въ комбинаціяхъ; но и въ нихъ лишь изрѣдка встрѣчались въ видѣ господ-

---

[1]) О значеніи простыхъ формъ въ свободномъ состояніи будетъ указано ниже. Замѣчу только, что появленіе такихъ формъ какъ $\{221\}$ или $\{210\}$ и т. д. ясно указываетъ на преобладаніе въ данной кристаллизаціи вещества поверхностной энергіи надъ векторіальной энергіей. Формы съ характеристиками ± 1 указываютъ на чрезвычайную простоту проявленія векторіальной энергіи и во многомъ аналогичны простымъ тонамъ звуковыхъ колебаній.

ствующихъ граней. Такъ, напримѣръ, *пирамидальный октаэдръ*, какъ рѣдкость, является господствующей формой въ нѣкоторыхъ *свинцовыхъ блескахъ* — напр. рис. 139 свинцоваго блеска изъ Ан-

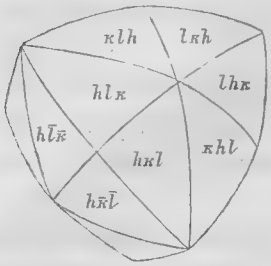


Рис. 136.

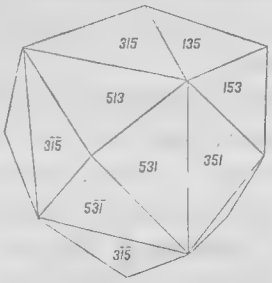


Рис. 137.

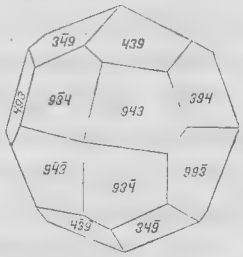


Рис. 138.

гліи по Грегу и Леттсому (1858), гдѣ $p=\{221\}$, $h=\{010\}$, а $o=\{111\}$. Еще рѣже встрѣчаются комбинаціи съ преобладаніемъ *дельтоэдра* [1]).

Изъ остальныхъ формъ наблюдается еще въ господствующемъ видѣ въ комбинаціяхъ немногихъ веществъ—*сорокавосьмигранникъ*

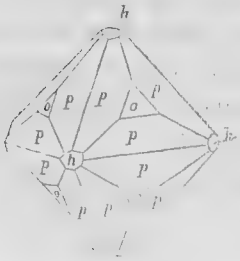


Рис. 139.

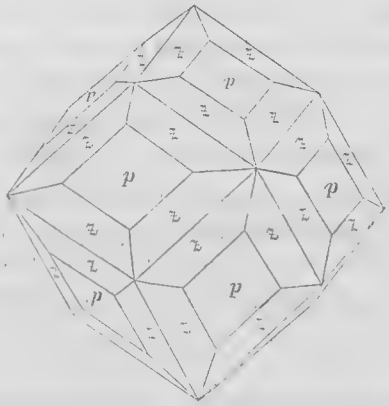


Рис. 140.

$\{hkl\}$ (строеніе $3\lambda^4 4L^3 6L^2 c 3\pi 6P$); напр. въ нѣкоторыхъ *гранатахъ*,

---

[1]) Такіе упоминаются, кажется, только для *тетраэдрита* изъ Капника (Гротъ 1878—рисунокъ не данъ). Любопытно, что формы $\{hhl\}$, гдѣ $h>l$ ни разу, ни въ одномъ веществѣ, не встрѣчены въ самостоятельномъ развитіи и почти не встрѣчаются господствующими въ многогранникахъ.

такъ рис. 140—*гроссуляръ* съ р. Вилуя по Н. И. Кокшарову (1858), при чемъ $d=\{110\}$, $z=\{431\}$ [1]).

Ни *тетартоэдръ* (классъ $3\lambda^2 4L^3$), ни *преломленный пентагональный додекаэдръ* (классъ $3\lambda^2 4L^3 c 3P$) — $\{hkl\}$—не наблюдались въ видѣ господствующихъ формъ и являются обычно въ видѣ очень небольшихъ площадокъ [2]).

336. Простыя формы правильной системы представляютъ большой и глубокій интересъ, такъ какъ на нихъ можно изучать генезисъ простой формы при условіи, исключающемъ всякое вліяніе химическаго состава или внѣшнихъ явленій.

Въ предъидущихъ системахъ индексы простыхъ формъ до извѣстной степени зависѣли отъ наблюдателя—вполнѣ въ триклинической, въ сильной степени въ ромбической и моноклинической. Даже въ квадратной и гексагональной системахъ, выборъ основной формы былъ до извѣстной степени произволенъ.

Совершенно другое явленіе наблюдается въ системѣ правильной. Здѣсь $\{111\}$ не зависитъ отъ выбора ея наблюдателемъ; за нее нельзя принять другую форму; точно также мало зависятъ отъ наблюдателя характеристики всѣхъ другихъ простыхъ формъ.

Поэтому на веществахъ этой системы особенно важно и вполнѣ возможно провѣрить правильность векторіальной гипотезы Грассманна (§ 193 сл.). Съ точки зрѣнія этой гипотезы, наиболѣе обычными и *господствующими* въ поліэдрѣ должны быть всегда плоскости съ индексами ± 1, разъ только форма поліэдра обусловливается гл. обр. его векторіальной структурой, а не поверхностнымъ натяженіемъ, т. е. $\{111\}$ (или $\{1\bar{1}1\}$), $\{100\}$ и $\{110\}$.

И дѣйствительно, изъ числа 329 веществъ [3]), которые можно

---

[1]) Сорокавосьмигранники въ свободномъ состояніи очень сложнаго индекса, близкіе къ $\{110\}$, давно извѣстны для нѣкоторыхъ гранатовъ (описаны еще Науманномъ (1829) для долины Алы), для такъ-называемыхъ *топазолитовъ*. Ихъ происхожденіе вѣроятно вторичное и они (см. ниже о *вицинальныхъ* тѣлахъ) не могутъ служить примѣромъ сорокавосьмигранника кристаллизаціи.

[2]) Очень часто считаютъ за преломленный пентагонъ-додекаэдръ—$\{hkl\}$ пирита и его изоморфной группы; но эти многогранники представляютъ комбинацію двухъ *тетартоэдровъ*, такъ какъ пиритъ кристаллизуется въ строеніи $3\lambda^2 4L^3$—ср. § 337.

[3]) Приблизительно до начала 1902 года, см. § 341.

на основаніи изученія кристаллической формы, отнести къ правильной системѣ, *нѣтъ ни одного, въ которомъ бы не являлась господствующей одна изъ этихъ формъ; въ комбинаціяхъ же онѣ наблюдались во всѣхъ, безъ исключенія веществахъ.* Только въ исключительныхъ случаяхъ, въ этихъ веществахъ могутъ быть господствующими формы съ болѣе сложными характеристиками, какъ $\{hhl\}$ или $\{lll\}$ (въ гранатахъ, тетраэдритахъ и т. д.,—§ 334), но для тѣхъ же химическихъ соединеній въ другихъ случахъ мы наблюдаемъ, какъ господствующія формы —{110} или {111}, {111}.

Въ дальнѣйшихъ главахъ я еще разъ вернусь къ этому явленію, здѣсь же необходимо только отмѣтить выводъ, что, вполнѣ согласно векторіальной гипотезѣ, во всякомъ тѣлѣ правильной системы наиболѣе обычна и господствуетъ одна изъ простыхъ формъ индекса±1.

337. Многогранники правильной системы—благодаря тому, что они въ видѣ простыхъ формъ являются замкнутыми тѣлами—особенно рѣзко и ярко проявляютъ вліяніе *энантіоморфизма* и *гемиморфизма.*

Энантіоморфными могутъ быть не только комбинаціи, но и простыя формы, напр. гироэдры (рис. 138, 54) или тетартоэдры (рис. 45). Особенно рѣзко это свойство проявляется въ комбинаціяхъ.

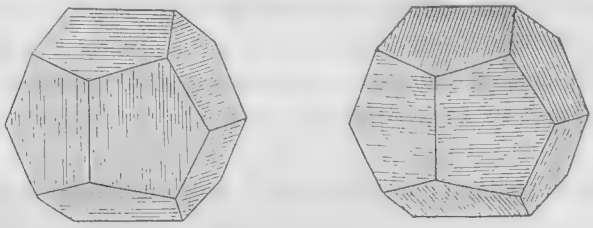
При этомъ, подобно раньше указаннымъ явленіямъ (§ 326), и здѣсь для простыхъ формъ одинаковаго индекса, должно отличать многогранники, плоскости которыхъ перпендикулярны къ посолоннымъ векторамъ отъ тѣхъ, грани коихъ перпендикулярны къ противусолоннымъ. Такъ напр. для строенія $3\lambda^2 4L^3$ есть *два* тетраэдра {111} и два тетраэдра {111} (всего *четыре*), два куба {100} и т. д. Можно различать ихъ на основаніи изученія нѣкоторыхъ явленій, которыя происходятъ на *плоскостяхъ* поліэдра (перпендикулярно къ векторамъ кристалла).

Иногда простое изученіе наружной формы многогранника позволяетъ сразу видѣть это явленіе. Такъ напр. въ *пиритѣ* (строеніе $3\lambda^2 4L^3$ [1]) можетъ быть два разныхъ {210}. И дѣйствительно, наблюдая полу-

---

[1]) Обыкновенно считаютъ пиритъ за вещество строенія $3\lambda^2 4L^3 c 3\pi$, но для тѣлъ этого строенія развитіе двухъ пентагональныхъ додекаэдровъ одного и того же индекса {210} невозможно.

чаемую на кристаллахъ пирита во время кристаллизаціи *штриховку* [1], можно убѣдиться, что въ однихъ кристаллахъ штрихи идутъ перпендикулярно къ ребру [012.012], а въ другихъ ему параллельно. Другими словами, плоскости разныхъ {210} по отношенію къ причинѣ, вызывающей штриховку, относятся различно. Направленіе наименьшей поверхностной энергіи въ плоскостяхъ одного {210} лежитъ перпендикулярно къ такому же направленію другого {210} (рис. 141 a—b). Можно убѣдиться, что и всѣ другія свойства, за-



a b

Рис. 141 a—b.

висящія отъ поверхности, въ такихъ многогранникахъ различны, такъ напр. {210} съ разной штриховкой обладаютъ не одинаковыми термоэлектрическими свойствами.

Можно объяснить такія различныя физическія свойства {210} только тѣмъ, что въ однихъ изъ нихъ плоскости перпендикулярны къ посолоннымъ векторамъ, а въ другихъ къ противусолоннымъ (ср. § 326).

338. Гемиморфность многогранниковъ правильной системы, существующая только для строенія $3\lambda^2 4L^3 6P'$, отличается довольно рѣзко отъ случаевъ, наблюдаемыхъ въ другихъ системахъ тѣмъ, что здѣсь всегда есть нѣсколько гемиморфныхъ осей, и не можетъ быть кристалла правильной системы съ одной гемиморфной осью. Во всѣхъ остальныхъ строеніяхъ (§ 228), мы всегда наблюдаемъ одну гемиморфную ось, рѣзко отличную отъ прочихъ (ось Z въ ромбической и гексагональной системахъ, ось Y въ моноклинической).

Такое свойство многогранниковъ правильной системы довольно долго не позволяло наблюдать въ нихъ гемиморфныя оси и только

[1]) Штриховка плоскостей, какъ увидимъ ниже, служитъ проявленіемъ поверхностнаго натяженія кристаллическихъ граней. Направленіе штриховъ соотвѣтствуетъ направленію наименьшаго поверхностнаго натяженія *на данной плоскости*.

работы Ганкеля въ концѣ концовъ выяснили это явленіе. Наиболѣе рѣзко проявляется гемиморфность осей по $4L^3$, тогда какъ $3L^2$ и большинство другихъ направленій не гемиморфны (ср. § 227). По мѣрѣ приближенія къ L^3 векторы становятся все болѣе гемиморфными. Каждое гемиморфное тѣло правильной системы имѣетъ всегда minimum 4 аналогичныхъ и 4 антилогичныхъ полюса, если мы станемъ изучать соотвѣтственныя ихъ электрическія свойства. Въ этомъ легко убѣдиться, если разсмотрѣть характеръ симметріи $3\lambda^2 4L^3 6P'$.

339. Вещества правильной системы были одни изъ первыхъ, изученіе которыхъ позволило разобраться въ явленіяхъ *геміэдріи*. Строенія—голоэдрическое, $3L^2 4L^3 6P'$ и $3\lambda^2 4L^3 c 3\pi$ были извѣстны уже въ концѣ XVIII стол. де Ромэ Делилю и послѣднія уже Вейссомъ правильно истолкованы, какъ геміэдріи. Какъ примѣръ комбинацій этихъ строеній см. для голоэдріи рис. 41, 47 и др., для класса $3L^2 4L^3 6P'$—

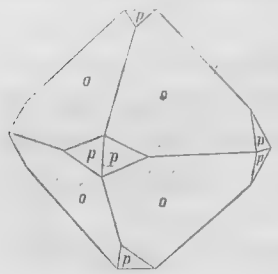


Рис. 142.

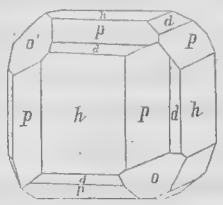


Рис. 143.

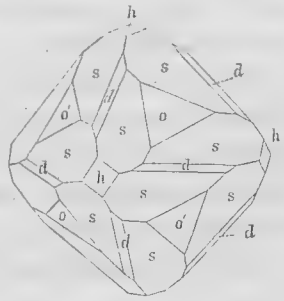


Рис. 144.

рис. 42, для строенія $3\lambda^2 4L^3 c 3\pi$—рис. 142—SnJ^4 по Гроту (1876), гдѣ $o=\{111\}$, p $\{210\}$. Значительно позже открыты два другихъ строенія; въ 1854 г. Раммельсбергъ (§ 202) наблюдалъ въ $NaClO^3$ строеніе $3\lambda^2 4L^3$, напр. рис. 143, комбинація $NaClO^3$ по Марбаху (1850), гдѣ $h=\{100\}$, $o'=\{1\bar{1}1\}$, $d=\{110\}$, p $\{102\}$, и, наконецъ, въ 1884 г. въ нашатырѣ Чермакъ нашелъ первый случай строенія $3\lambda^4 4L^3 6L^2$. Но эти два послѣднихъ класса наблюдались въ природѣ довольно рѣдко. Какъ примѣръ послѣдняго строенія можно привести *куприть* Cu^2O—изъ руд. Фениксъ въ Корнваллисѣ по Майрсу (1874), рис. 144—гдѣ $h=\{100\}$, $o=\{111\}$, $o'=\{\bar{1}11\}$, $d=\{110\}$ и $s=\{986\}$ [1]).

[1]) Здѣсь, такъ же какъ и въ случаѣ рис. 138, сложность индекса $\{hkl\}$ ясно указываетъ на особыя условія (можетъ быть на явленія вытравленія) образованія гироэдра, какъ господствующей формы.

340. Количество изученныхъ кристаллическихъ веществъ. Такимъ образомъ, въ концѣ концовъ, изъ числа 32 кристаллическихъ строеній намъ точно извѣстно въ настоящее время 29 случаевъ и только три строенія ($Л^4$ квадратной и $\lambda^3\pi$, также $\lambda^{33}L^2\pi 3P'$ гексагональной) съ точностію не наблюдались въ природѣ. Но ихъ нахожденіе есть вопросъ времени и улучшенія методовъ нашего изслѣдованія.

Важно другое обстоятельство—именно то, что въ числѣ всѣхъ до сихъ поръ изслѣдованныхъ случаевъ нѣтъ *ни одного*, который бы несомнѣнно доказывалъ существованіе строенія, непредвидимаго теоріей [1]).

Однако для огромнаго большинства изъ этихъ 29 строеній мы имѣемъ немного примѣровъ. Для нѣкоторыхъ мы знаемъ 1—2 вещества (напр. для $\lambda^6 6L^2$, λ^3, $\lambda^4 4L^2$, и т. д.).

Это обусловлено въ значительной степени тѣмъ, что вообще наше знаніе о кристаллической структурѣ веществъ крайне недостаточно и неполно.

341. Въ результатѣ болѣе чѣмъ вѣковой работы—начиная съ Ромэ Делиля, съ 1784 г., кристаллографически изучено немного болѣе 6000 соединеній [2]). Количество это ничтожно по сравненіи даже съ извѣстными намъ теперь твердыми продуктами химіи, число которыхъ считается десятками тысячъ.

Мы не можемъ въ настоящее время опредѣлить, какое коли-

---

[1]) Высказывались предположенія о существованіи большаго количества строеній, чѣмъ 32—напр. Беккенкамповъ (1890 сл.), Л. Вульфомъ (1887 сл.), Виолем (1897 сл.) и др.,—но въ основѣ этихъ доказательствъ лежатъ не экспериментальныя данныя, а теоретическія предпосылки, основанныя на молекулярныхъ предположеніяхъ. Провѣрка данныхъ Беккенкампа, сдѣланная напр. для барита Самойловымъ (1901), не подтверждаетъ его выводовъ. Также мало подтвердились и другія предположенія—напр. Л. Вульфа о существованіи нѣсколькихъ тетартоэдрій правильной системы.—Заслуживаютъ большаго вниманія нѣкоторые случаи кристаллизацій, напр. для застывающихъ капель металловъ (Ag, Cd, Zn и т. д.),—которыя даютъ поліэдры, не подчиняющіеся закону Гаюи—или случаи граней, появляющихся въ нѣкоторыхъ веществахъ при соприкосновеніи ихъ съ посторонними предметами, граней, также не подчиняющихся закону Гаюи — напр. для α-сѣры при ея кристаллизаціи изъ скипидара и т. д. Но здѣсь мы имѣемъ дѣло со сложными случаями, связанными, кажется, въ первыхъ примѣрахъ со спутанными двойниковыми образованіями, а во второмъ съ явленіями роста и образованіемъ „ложныхъ“ граней.

[2]) Въ 1845 году, по подсчету Вѣнскихъ академиковъ: Гайдингера и др., такихъ веществъ было извѣстно всего около 510, въ 1869 году по Франкенгейму число это увеличилось до 1944.

чество изъ изученныхъ 6000 соединеній относится къ каждому строенію, такъ какъ въ очень многихъ изъ нихъ—въ большинствѣ—строеніе не опредѣлено точно. Дѣло въ томъ, что только съ 1880—1890 годовъ, послѣ окончательнаго упроченія идей Гесселя-Бравэ, начали точно опредѣлять строенія (классы); раньше въ огромномъ большинствѣ случаевъ опредѣляли только *системы*.

По отношенію къ этимъ системамъ получаются нѣкоторыя правильности, или вѣрнѣе особенности, имѣющія для насъ тѣмъ большій интересъ, что онѣ не предвидятся никакой изъ выставленныхъ нынѣ теорій и, вѣроятно, обусловливаются какими-нибудь причинами, которыя пока не принимаются въ разсчетъ при выводѣ законовъ и обобщеній кристаллографіи.

Среди всѣхъ изученныхъ веществъ, къ началу 1902 года было опредѣлено [1]):

Системы.	Количество. Минералы.	Искусств. тѣла.	Сумма.	%	% на одно строеніе[2]).	% на одну группу[3]).
1. Правильная. . . .	127	202	329	5.80	1.16	5.80
2. Квадратная	49	224	273	4.82	0.60	12.51
3. Гексагональная. .	116	320	436	7.69	0.63	
4. Ромбическая. . . .	210	1493	1703	30.06	10.02	81.67
5. Моноклинническая	215	2128	2343	41.36	13.79	
6. Триклинническая. .	46	535	581	10.26	5.13	
	763	4902	5665			

[1]) Цифры эти, имѣющія конечно относительный характеръ, были получены слѣдующимъ образомъ. Для минераловъ я воспользовался таблицами Грота (Tabellar. Uebers. d. Mineralien, 3 изд. L. 1899), которыя дополнилъ новѣйшими данными текущей литературы. При этомъ, изоморфныя смѣси брались отдѣльно только тогда, когда ихъ растворители были различны—напр. $FeSiO^3$ и $MgSiO^3$ брались въ разсчетъ вмѣсто всѣхъ авгитовъ ромбической системы и т. д. Для полученія числа соединеній искусственныхъ (изъ коихъ были выключены тѣла, встрѣченныя въ природѣ) я воспользовался сводкой Раммельсберга: Handb d. physik. krystalogr. Chemie I—II. 1881—1882, при чемъ послѣ 1881—дополнилъ ее по статьямъ и рефератамъ въ Zeitschrift für Krystallographie, кончая 35 его томомъ. Конечно, такой подсчетъ неполонъ; много пропусковъ, особенно у Раммельсберга; но едва ли ошибка можетъ достигать одного, двухъ процентовъ.

[2]) Эта цифра имѣетъ исключительно схематическое значеніе, такъ какъ ясно, что кристаллическія строенія распредѣлены неравномѣрно.

[3]) См. § 128.

342. За послѣднія 20 лѣтъ въ среднемъ ежегодно кристаллографически изслѣдуется около 130—150 новыхъ веществъ; слѣдовательно, введя поправку на два года (считая какъ возможные пропуски, такъ и работу 1902 года) имѣется въ среднемъ къ началу 1903 года около 6000 веществъ кристаллографически изученныхъ.

Среди нихъ видно поразительное преобладаніе моноклинической системы, которая одна составляетъ около 42% всѣхъ встрѣченныхъ веществъ, а вся двуосная группа достигаетъ 80%; изъ числа всѣхъ 32 строеній пять являются рѣзко преобладающими.

Можно легко убѣдиться, что этотъ выводъ далеко не случайный, обусловленный современнымъ состояніемъ знаній — ибо если мы ограничимся знаніемъ 1882 года (отчасти вопреки старому подсчету Франкенгейма въ 1869 году) мы получимъ въ общемъ тѣ же самые результаты (§ 343).

Въ дѣйствительности, этотъ результатъ долженъ быть еще болѣе рѣзко выраженъ, чѣмъ это видно въ данной таблицѣ, ибо очень многія вещества правильной и одноосныхъ системъ оптически аномальны, т. е. могутъ состоять изъ сростковъ недѣлимыхъ низшей симметріи. Это явленіе такъ обычно, что одно время Малляръ, Г. Н. Вырубовъ и другіе склонялись къ идеѣ, что вообще всѣ изотропные и одноосные кристаллы являются лишь сростками двуосныхъ тѣлъ. И дѣйствительно, очень вѣроятно, что нѣкоторыя — можетъ быть довольно многія — изъ веществъ, причисленныхъ въ таблицѣ къ этимъ системамъ, въ дѣйствительности должны были бы быть отнесены къ двуоснымъ веществамъ; но нѣтъ данныхъ, которыя указывали бы на вѣроятность обратной ошибки.

Такимъ образомъ, какъ общій результатъ подсчета, несомнѣнно слѣдуетъ, что двуосныя вещества, и особенно моноклиническая система, почему-то являются при изучаемыхъ условіяхъ господствующими и какъ бы наиболѣе рѣзко отвѣчаютъ свойствамъ твердаго вещества при обычныхъ условіяхъ нашей научной работы.

343. Можно было бы думать, что причину этого явленія надо искать въ химическихъ свойствахъ веществъ, такъ какъ преобладаніе двуосныхъ тѣлъ значительно менѣе рѣзко выражено въ минералахъ (всего ок. 29 %), чѣмъ въ искусственныхъ веществахъ. Но какъ разъ весьма вѣроятна ошибка для минераловъ болѣе симметричныхъ системъ; именно для нихъ выдвинуто представленіе о ихъ

строеніи изъ тонкихъ сростковъ двуосныхъ веществъ. Очень возможно, что принявъ такіе минералы (напр. гранаты, анальцимы и т. д.) дѣйствительно за двуосные сростки, % минераловъ, дѣйствительно выкристаллизовывающихся въ изотропной и одноосной группахъ, окажется соотвѣтствующимъ обычному % для искусственныхъ химическихъ соединеній. Возможно видѣть въ этомъ для минераловъ даже подтвержденіе идей Малляра.

Другую причину можно было бы искать въ иныхъ недостаткахъ таблицы напр. въ преобладаніи въ ней хорошо кристаллизующихся веществъ, почему бы то ни было изслѣдуемыхъ въ настоящее время [1]). Но этому противорѣчитъ обстоятельство, что процентное отношеніе не измѣнится, если даже взять другой періодъ исторіи науки; такъ напр. для искусственныхъ соединеній до 1882 года (по Раммельсбергу), мы имѣемъ для 2377 веществъ:

		%		
Правильная с. . .	124	5.21	(теперь	5.80)
Квадратная	132	5.55	(»	4.82)
Гексагональная .	173	7.28	(»	7.69)
Ромбическая. . . .	747	31.42	(»	30.06)
Моноклиническая	966	40.64	(»	41.36)
Триклиническая .	235	9.88	(»	10.26)

Наконецъ, можно было бы предположить, что на эти числа вліяютъ чисто случайныя обстоятельства, напр. нѣкоторыя вещества, хорошо кристаллизующіяся, легко доступныя и способныя образовать многочисленные изоморфные ряды, перевѣшиваютъ чашку вѣсовъ въ пользу двуосныхъ системъ. Таковы напр. соли винныхъ кислотъ (большею частію двуосныя) или группа двойныхъ сѣрнокислыхъ солей съ $6H_2O$ (напр. $K_2Mg(SO_4)_2\ 6H_2O$), которая дала такъ много для познанія физическихъ свойствъ кристалловъ (моноклиническая) и т. д. Но въ дѣйствительности, наблюдается скорѣе вліяніе такихъ многочисленныхъ изоморфныхъ рядовъ на увеличеніе тѣлъ правильной системы — сѣрнистые металлы (изоморфнаго ряда Fe), квасцы, шпинели и т. д. (всѣ правильной сист.) преобладаютъ по числу членовъ надъ другими изоморфными рядами.

---

[1] Такъ напр. изъ органическихъ соединеній особенно много изучено веществъ съ ассиметрическимъ углеродомъ, кристаллы которыхъ представляютъ интересъ для физика и химика и которые въ огромномъ большинствѣ двуосны.

344. Остается, слѣдовательно, признать этотъ фактъ и считаться съ нимъ при изученіи природныхъ явленій. *Двуосныя фазы твердой матеріи, по какимъ-то причинамъ, являются болѣе устойчивыми при обычныхъ условіяхъ, чѣмъ остальныя ея состоянія и при строенія моноклинической системы сильно преобладаютъ надъ всѣми остальными.*

Надо, однако, замѣтить, что, къ сожалѣнію, таблица эта не даетъ намъ вполнѣ точнаго масштаба даннаго явленія. Огромное большинство указанныхъ въ ней тѣлъ устойчивы при обычныхъ условіяхъ температуры и давленія, но въ нее включены и полиморфныя разности тѣлъ, которыя соотвѣтствуютъ совершенно инымъ термодинамическимъ условіямъ. Для правильнаго вывода, надо было бы исключить эти полиморфныя разности, не отвѣчающія условіямъ нашей обстановки. Можно однако убѣдиться, что отношенія системъ при этомъ не измѣнятся, такъ какъ количество такихъ тѣлъ едва ли достигаетъ 200 — 300 и размѣщено оно по всѣмъ системамъ довольно равномѣрно.

Отдѣльныя кристаллическія строенія вполнѣ аналогичны жидкому и газообразному состояніямъ матеріи. Они являются соотвѣтственными фазами твердаго вещества (§ 370 сл.). Причина преобладанія той или иной фазы вещества для насъ до сихъ поръ вполнѣ загадочна, какъ загадочны причины, вызывающія для одного тѣла жидкое — при данныхъ условіяхъ, — а для другого газообразное состояніе. Любопытно, однако, отмѣтить здѣсь, что изъ твердыхъ состояній рѣзко преобладаетъ двуосная группа, какъ разъ группа съ наиболѣе свободными векторами, т. е. слѣдовательно въ природѣ преобладаютъ тѣ твердыя фазы матеріи, которыя наиболѣе отличны отъ ея жидкой и газообразной фазъ [1]).

---

[1]) Надо, однако, замѣтить, что этотъ выводъ, какъ показали Гротъ (1889) и Реттерсъ (1894) не можетъ касаться всякаго рода химическихъ соединеній. Въ простыхъ по составу тѣлахъ (напр. элементахъ, окислахъ и т. д.) сильно преобладаетъ при тѣхъ же условіяхъ изотропная группа кристалловъ и т. д. Повидимому, здѣсь сильно вліяетъ химическій составъ вещества, но малое количество изученныхъ тѣлъ отдѣльныхъ классовъ химическихъ соединеній не позволяетъ пока дѣлать строго научныхъ сравненій.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

Отъ автора I

ГЛАВА I. *Очеркъ развитія кристаллографіи* 1

1. Начало кристаллографіи. XVII вѣкъ (§ 4).—2. Кристаллографія въ XVIII вѣкѣ до де-Ромэ-Делиля (§ 12).—3. Реформа де-Ромэ-Делиля и Гаюи (§ 15).—4. Геометрическая кристаллографія послѣ Гаюи (§ 17).—5. Созданіе кристаллооптики (§ 20). — 6. Развитіе химической кристаллографіи (§ 25).—7. Созданіе теоріи кристаллическихъ строеній (§ 29).—8. Развитіе измѣрительныхъ приборовъ и методовъ вычисленія (§ 30).—9. Современное развитіе и ближайшія задачи кристаллографіи (§ 33).

ГЛАВА II. *Предметъ кристаллографіи. Понятіе о кристаллѣ* 40

1. Отношеніе кристаллографіи къ физикѣ и минералогіи (§ 40). — 2. Векторы и векторіальность (§ 43). — 3. Понятіе о кристаллѣ (§ 44).— 4. Основныя свойства кристалла. Однородность и векторіальность (§ 49).— 5. Гомологическія точки. Пространственныя рѣшетки (§ 61). — 6. Химическій составъ кристалла (§ 67).—7. Аморфныя тѣла (§ 74).—8. Величина частицы кристалла (§ 81).

ГЛАВА III. *Явленія симметріи, ихъ законы и ихъ зависимость отъ строенія кристалла* 78

1. Симметрія. Элементы симметріи (§ 82). — 2. Связь между элементами симметріи (§ 101).—3. Кристаллическія строенія (§ 113).—4. Жидкіе кристаллы (§ 117).—5. Кристаллическія системы (§ 120).—6. Группы кристаллическихъ системъ (§ 128).—7. Молекулярныя теоріи кристалловъ (§ 134).

ГЛАВА IV. *Геометрическія правильности кристаллическихъ многогранниковъ* 148

1. Законъ постоянства гранныхъ угловъ (§ 146). — 2. Параметры и индексы кристаллическихъ плоскостей (§ 152).—3. Зоны или пояса (§ 163).— 4. Законъ параметровъ (§ 169).—5. Простыя формы (§ 177).—6. Законъ Гаюи и векторіальная гипотеза Грассманна (§ 184). — 7. Энантіоморфные кристаллическіе многогранники. Геометрическія свойства векторовъ (§ 199). — 8. Гемиморфизмъ (§ 218). — 9. Основы проекцій кристаллическихъ многогранниковъ (§ 229).—10. Связь зонъ съ симметріей (§ 239).

ГЛАВА V. *Обзоръ кристаллическихъ строеній* 260

1. Общія основанія систематики кристаллическихъ строеній (§ 257).— 2. Система триклиническая (§ 265).—3. Система моноклиническая (§ 275).— 4. Система ромбическая (§ 288).—5. Система квадратная (§ 299).—6. Система гексагональная (§ 318).—7. Система правильная (§ 330).—8. Количество изученныхъ кристаллическихъ веществъ (§ 340).

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Слѣдуетъ читать.*
8	24	Philosohnical	Philosophical
9	22	считаетъ	считалъ
60	30—31	его строеніи	строеніи кристалла
72	24	бѣлка	бѣлки
110	30	при деформаціяхъ	деформаціямъ
116	3	■	γ
116	4	γ	α
116	рис. 18	α	γ
116	„	γ	α
133	11	1846	1866
141	33	181	199
155	26	*EF*	*EO*
159	28	кристаллическихъ	кристаллографическихъ
159	29	для нихъ тѣла	для тѣла
165	21	0 | 1000 | 0	0 | 1001 | 0
174	2	$3\lambda^2 c\ 3\pi$	$3\lambda^2$
214	17	всегда въ нихъ	въ нихъ всегда
269	5	§ 263	§ 262
269	28	которые	которыя
272	19	тысячи	сотни
288	прим. 4	1857	1859
329	„ 7	два	три

2p. 50R